

## 数学试卷

2020. 10

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1. 下列命题为真命题的是

- A.  $\exists x \in \mathbb{Z}, 1 < 4x < 3$                       B.  $\exists x \in \mathbb{Z}, 15x + 1 = 0$   
 C.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$                       D.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 2 > 0$

2. 集合  $A = \{x \mid 4 - |2x - 1| \in \mathbb{N}^*\}$ ，则 A 的非空真子集的个数是

- A. 62                      B. 126                      C. 254                      D. 510

3. 已知  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，则下列命题中正确的个数是

- ①若  $ac^2 > bc^2$ ，则  $a > b$ ；                      ②若  $|a - 2| > |b - 2|$ ，则  $(a - 2)^2 > (b - 2)^2$ ；  
 ③若  $a > b > c > 0$ ，则  $\frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + c}$ ；                      ④若  $a > 0, b > 0, a + b > 4, ab > 4$ ，则  $a > 2, b > 2$ 。

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

4. 若实数  $a, b$  满足  $a \geq 0, b \geq 0$  且  $ab = 0$ ，则称  $a$  与  $b$  互补。记  $\varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$ ，

那么  $\varphi(a, b) = 0$  是  $a$  与  $b$  互补的

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

5. 集合  $A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0, x \in \mathbb{N}^*\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ，若  $B \subseteq C \subseteq A$ ，则满足条件的集合 C 的个数是

- A. 8                      B. 7                      C. 4                      D. 3

6. 要制作一个容积为  $4\text{m}^3$ ，高为 1m 的无盖长方体容器，已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是

- A. 80 元                      B. 120 元                      C. 160 元                      D. 240 元

7. 已知  $a > 0, b > 0, ab = 8$ ，则  $\log_2 a \cdot \log_2 b$  的最大值为

- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{9}{4}$                       C. 4                      D. 8

8. 已知  $m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}} = 4$ ，则  $\frac{m^{\frac{3}{2}} - m^{-\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} - m^{-\frac{1}{2}}}$  的值是

- A. 15                      B. 12                      C. 16                      D. 25

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9. 某公司一年购买某种货物 900 吨，现分次购买，若每次购买  $x$  吨，运费为 9 万元/次，一年的总储存费用为  $4x$  万元，要使一年的总运费与总储存费用之和最小，则下列说法正确

的是

- A.  $x=10$  时费用之和有最小值      B.  $x=45$  时费用之和有最小值  
C. 最小值为 850 万元      D. 最小值为 360 万元

10. 有限集合  $S$  中元素的个数记做  $\text{card}(S)$ , 设  $A, B$  都为有限集合, 下列命题中是真命题的是

- A.  $A \cap B = \emptyset$  的充要条件是  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$   
B.  $A \subseteq B$  的必要条件是  $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$   
C.  $A \subset B$  的充分不必要条件是  $\text{card}(A) \leq \text{card}(B) - 1$   
D.  $A = B$  的充要条件是  $\text{card}(A) = \text{card}(B)$

11. 设  $a, b, c$  都是正数, 且  $4^a = 6^b = 9^c$ , 那么

- A.  $ab+bc=2ac$     B.  $ab+bc=ac$     C.  $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$     D.  $\frac{1}{c} = \frac{2}{b} - \frac{1}{a}$

12. 对任意  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , 记  $A \oplus B = \{x | x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$ , 并称  $A \oplus B$  为集合  $A, B$  的对称差. 例如  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ , 则  $A \oplus B = \{1, 4\}$ . 下列命题中正确的是

- A. 若  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , 且  $A \oplus B = B$ , 则  $A = \emptyset$   
B. 若  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , 且  $A \oplus B = \emptyset$ , 则  $A = B$   
C. 若  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , 且  $A \oplus B \subseteq A$ , 则  $A \subseteq B$   
D. 存在  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , 使得  $A \oplus B = \bigcup_{\mathbb{R}} A \oplus \bigcup_{\mathbb{R}} B$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上)

13. 命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$ ” 的否定为\_\_\_\_\_.

14. 设集合  $A = \{x | 1 < x < 4\}$ ,  $B = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ , 则  $A \cap (\bigcup_{\mathbb{R}} B) =$ \_\_\_\_\_.

15. 若  $a, b$  是方程  $2(\lg x)^2 - \lg x^4 + 1 = 0$  的两个实数根, 则  $\lg(ab)(\log_a b + \log_b a)$  的值是\_\_\_\_\_.

16. 若对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 不等式  $(a^2 - 1)x^2 - (a - 1)x - 1 < 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

(1) 化简:  $(a^4 b^{-4})^{\frac{1}{4}} \times a^0 - (a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}})^6 \div (ab^4) + \sqrt{(-a)^2}$  ( $a > 0, b > 0$ );

(2) 先化简, 再求值. 已知  $a = 2\sqrt{7}$ ,  $b = 5\sqrt{2}$ , 求  $\frac{a^6 b^{-6} - 9b^4}{\sqrt{a^6 b^{-6} - 6a^3 b^{-1} + 9b^4}} \cdot \frac{b^6}{a^3 + 3b^5}$

的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知关于  $x$  的不等式  $\frac{ax-5}{x^2-a} < 0$  的解集为  $M$ .

- (1) 当  $a=4$  时, 求集合  $M$ ;
- (2) 若  $3 \in M$  且  $5 \notin M$ , 求实数  $a$  的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知命题  $p: x^2 - 4x - 5 \leq 0$ , 命题  $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ .

- (1) 若  $p$  是  $q$  的充分条件, 求实数  $m$  的取值范围;
- (2) 若  $m=5$ , 命题  $p$  和  $q$  中有且只有一个真命题, 求实数  $x$  的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

已知  $x > 0, y > 0, 2xy = x + 4y + a$ .

- (1) 当  $a=6$  时, 求  $xy$  的最小值;
- (2) 当  $a=0$  时, 求  $x + y + \frac{2}{x} + \frac{1}{2y}$  的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

(1) 已知  $m > 0$ ,  $n > 0$ ,  $\log_4 m = \log_8 n = \log_{16}(2m+n)$ . 求  $\log_2 \sqrt{m} - \log_4 n$  的值;

(2) 若  $\log_{18} 9 = a$ ,  $18^b = 5$ , 用  $a, b$  表示  $\log_{36} 45$ .

22. (本小题满分 12 分)

已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + x + 2 < 0$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 若  $ax^2 + x + 2 < 0$  的解集为  $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < b\}$ , 求实数  $a, b$  的值;

(2) 求关于  $x$  的不等式  $ax^2 + x + 2 < ax + 3$  的解集.

## 数学试卷答案

1. D    2. B    3. C    4. C    5. C    6. C    7. B    8. A  
9. BD    10. AB    11. AD    12. ABD

13.  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 \leq 0$     14. (3, 4)    15. 12    16.  $(-\frac{3}{5}, 1]$

17.

$$\begin{aligned} \text{解(1)} & (a^4 b^{-4})^{\frac{1}{2}} \times a^0 - (a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}})^6 \div (ab^4) + \sqrt{(-a)^2} \\ & = ab^{-1} - (a^2 b^3)^6 \div (ab^4) + |-a| = ab^{-1} - ab^{-1} + a = a; \\ \text{(2)} & a^6 b^{-6} - 6a^3 b^{-1} + 9b^4 = (a^3 b^{-3} - 3b^2)^2, \end{aligned}$$

由  $a = 2\sqrt{7}$ ,  $b = 5\sqrt{2}$ , 得  $a^3 b^{-3} < 3b^2$ .

$$\begin{aligned} \text{所以原式} & = \frac{(a^3 b^{-3} - 3b^2)(a^3 b^{-3} + 3b^2)}{3b^2 - a^3 b^{-3}} \cdot \frac{b^6}{a^3 + 3b^5} \\ & = -\frac{(a^3 b^{-3} + 3b^2)b^6}{a^3 + 3b^5} = -\frac{(a^3 + 3b^5)b^3}{a^3 + 3b^5} \\ & = -b^3. \end{aligned}$$

因为  $b = 5\sqrt{2}$ , 故原式  $= -250\sqrt{2}$ .

18.

$$\text{解(1)} a = 4, \frac{4x-5}{x^2-4} < 0, \text{ 即 } (x^2-4)(4x-5) < 0, \text{ 即 } (x+2)(4x-5)(x-2) < 0,$$

$$\text{所以 } x < -2 \text{ 或 } \frac{5}{4} < x < 2,$$

$$\text{所以 } M = (-\infty, -2) \cup (\frac{5}{4}, 2);$$

$$\text{(2) 因为 } 3 \in M, 5 \notin M, \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{3a-5}{9-a} < 0, \\ 25-a=0. \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{3a-5}{9-a} < 0, \\ \frac{5a-5}{25-a} \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{当 } \begin{cases} \frac{3a-5}{9-a} < 0, \\ 25-a=0. \end{cases} \text{ 解得 } a=25;$$

$$\text{当 } \begin{cases} \frac{3a-5}{9-a} < 0, \\ \frac{5a-5}{25-a} \geq 0. \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} (3a-5)(a-9) > 0, \\ (a-1)(a-25) \leq 0, \\ a-25 \neq 0. \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} a > 9 \text{ 或 } a < \frac{5}{3}, \\ 1 \leq a < 25. \end{cases}$$

即  $a \in [1, \frac{5}{3}) \cup (9, 25)$ ,

所以实数  $a$  的取值范围为  $[1, \frac{5}{3}) \cup (9, 25]$ .

19.

解  $p: x \in [-1, 5]; q: x \in [1-m, 1+m]$ ,

(1) 若  $p$  是  $q$  的充分条件, 则  $[-1, 5] \subseteq [1-m, 1+m]$ ,

所以  $1-m \leq -1, 1+m \geq 5$ , 所以  $m \geq 4$ .

故  $m$  的取值范围为  $[4, +\infty)$ ;

(2)  $m=5$ , 则  $q: x \in [-4, 6]$ .

$p$  和  $q$  中有且只有一个真命题, 则  $p$  真  $q$  假或  $p$  假  $q$  真,

当  $p$  真  $q$  假时  $\begin{cases} x \in [-1, 5], \\ x \in (-\infty, -4) \cup (6, +\infty). \end{cases} x \in \emptyset;$

当  $p$  假  $q$  真时  $\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty), \\ x \in [-4, 6]. \end{cases}$  所以  $x \in [-4, -1) \cup (5, 6]$ .

综上,  $x$  的取值范围为  $[-4, -1) \cup (5, 6]$ .

20.

解(1)  $a=6$  时,  $2xy = x+4y+6 \geq 2\sqrt{4xy}+6$ ,

所以  $(\sqrt{xy})^2 - 2\sqrt{xy} - 3 \geq 0$ , 所以  $\sqrt{xy} \geq 3$  或  $\sqrt{xy} \leq -1$  (舍去),

所以  $xy \geq 9$ , 当  $\begin{cases} x=4y, \\ 2xy=x+4y+6. \end{cases} (x>0, y>0)$ , 即  $\begin{cases} x=6, \\ y=\frac{3}{2}. \end{cases}$  时取 "=",

所以  $xy$  的最小值为 9.

(2)  $a=0$  时,  $2xy = x+4y$ , 所以  $\frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = 1$ ,

所以  $x+y + \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = x+y+1 = (x+y)(\frac{2}{x} + \frac{1}{2y}) + 1 = (\frac{5}{2} + \frac{2y}{x} + \frac{x}{2y}) + 1$

$\geq (\frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{x}{2y}}) + 1 = \frac{11}{2}$ ,

当  $\begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{x}{2y}, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = 1. \end{cases}$  即  $\begin{cases} x=3, \\ y=\frac{3}{2}. \end{cases}$  时取 "=",

所以  $x+y + \frac{2}{x} + \frac{1}{2y}$  的最小值为  $\frac{11}{2}$ .

21.

解(1)因为  $\log_4 m = \log_8 n = \log_{16}(2m+n)$ ,

$$\text{所以 } \frac{1}{2}\log_2 m = \frac{1}{3}\log_2 n = \frac{1}{4}\log_2(2m+n),$$

$$\text{所以 } 6\log_2 m = 4\log_2 n = 3\log_2(2m+n),$$

$$\text{故 } m^6 = n^4 = (2m+n)^3,$$

$$\text{所以 } m^2 = 2m+n, n = m^{\frac{3}{2}}, \text{ 所以 } m^2 = 2m + m^{\frac{3}{2}}, \text{ 所以 } m - \sqrt{m} - 2 = 0,$$

$$\text{所以 } \sqrt{m} = 2, n = 8,$$

$$\text{所以 } \log_2 \sqrt{m} - \log_4 n = \log_2 2 - \log_4 8 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2};$$

(2)因为  $18^b = 5$ , 所以  $b = \log_{18} 5$ ,

$$\log_{36} 45 = \frac{\log_{18} 45}{\log_{18} 36} = \frac{\log_{18} 9 + \log_{18} 5}{1 + \log_{18} 2} = \frac{a+b}{2-a}.$$

22.

解(1)由题意,  $ax^2 + x + 2 = 0$  有一个根为 1 且  $a < 0$ ,

所以  $a + 3 = 0$ , 所以  $a = -3$ , 此时不等式为  $-3x^2 + x + 2 < 0$ ,

所以解集为  $\{x|x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{2}{3}\}$ , 所以  $b = -\frac{2}{3}$ .

(2) $ax^2 + x + 2 < ax + 3$ , 即  $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0$ ,

即  $(ax+1)(x-1) < 0$ .

当  $a = 0$  时, 不等式的解集为  $\{x|x < 1\}$ ;

当  $a > 0$  时, 不等式的解集为  $\{x|-\frac{1}{a} < x < 1\}$

当  $-1 < a < 0$  时, 不等式的解集为  $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{a}\}$

当  $a = -1$  时, 不等式的解集为  $\{x|x \neq 1\}$ ;

当  $a < -1$  时, 不等式的解集为  $\{x|x < -\frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\}$ .