南京外国语学校 2022—2023 学年度第一学期高一年级

第一次阶段测试

数学试卷

2022.10

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2+x-6<0\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1,2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】解不等式可得集合 A，进而可得 $A\cap B$.

【详解】由已知得 $A=\{x|x^2+x-6<0\}=\{x|-3<x<2\}$，

所以 $A\cap B=\{0,1\}$，

故选：C.

2. 命题"$\forall x>0$，都有 $x^2-x+3\le 0$"的否定为（　　）

A. $\exists x\le 0$，使得 $x^2-x+3>0$　　B. $\exists x>0$，使得 $x^2-x+3>0$

C. $\forall x>0$，都有 $x^2-x+3>0$　　D. $\forall x\le 0$，都有 $x^2-x+3>0$

【答案】B

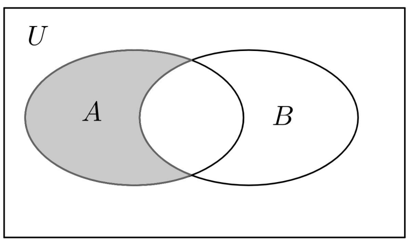
【解析】

【分析】根据命题的否定的概念直接判断.

【详解】命题"$\forall x>0$，都有 $x^2-x+3\le 0$"的否定为 $\exists x>0$，使得 $x^2-x+3>0$，

故选：B.

3. 如图，已知集合 $U=\mathrm{R}$，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|(x+1)(x-2)\le 0\}$，则图中阴影部分表示的集合的子集的个数为（　　）



A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】先求得图中阴影部分表示的集合，再根据该集合中元素个数即可求出该集合子集个数.

【详解】$B=\{x|(x+1)(x-2)\le 0\}=\{x|-1\le x\le 2\}$，则 $\complement_U B=\complement_R B=\{x|x<-1\text{ 或 }x>2\}$，

图中阴影部分表示的集合为

$A\cap(\complement_U B)=\{1,2,3,4,5\}\cap\{x|x<-1\text{ 或 }x>2\}=\{3,4,5\}$；

集合 $\{3,4,5\}$ 的子集有 $2^3=8$（个）

则图中阴影部分表示的集合的子集个数为 8.

故选：D

4. 若命题：“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2-x-m=0$”是真命题，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{1}{4},0\right]$　　B. $\left[0,\frac{1}{4}\right]$　　C. $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】利用判别式即可得到结果.

【详解】∵“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2-x-m=0$”是真命题，

∴ $\Delta=(-1)^2+4m\ge 0$，解得 $m\ge-\frac{1}{4}$.

故选：C

5. 若 $A=\left\{x\left|\left|x-\frac{1}{2}\right|<1\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x}\ge 1\right.\right\}$，定义 $A\times B=\{x|x\in A\cup B\text{ 且 }x\notin A\cap B\}$，则

$A\times B=$（　　）

A. $\{x|-\frac{1}{2}<x\le 0\text{ 或 }1\le x<\frac{3}{2}\}$　　B. $\{x|-\frac{1}{2}<x\le 0\text{ 或 }1<x<\frac{3}{2}\}$

C. $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x\le\frac{3}{2}\right.\right\}$　　D. $\{x|0<x\le 1\}$

【答案】B

【解析】

【分析】分别解不等式，根据 $A\times B$ 的定义直接计算即可.

【详解】由已知 $A=\left\{x\left|\left|x-\frac{1}{2}\right|<1\right.\right\}=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x}\geq 1\right.\right\}=\left\{x\left|0<x\leq 1\right.\right\}$，

则 $A\cup B=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$，$A\cap B=\left\{x\left|0<x\leq 1\right.\right\}$

故 $A\times B=\{x|-\frac{1}{2}<x\leq 0$ 或 $1<x<\frac{3}{2}\}$，

故选：B.

6. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$，则下列不等式不正确的（　　）

A. $ab\geq 16$

B. $2a+b\geq 6+4\sqrt{2}$

C. $a-b<0$

D. $\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}\geq\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用基本不等式可判断 ABD 选项，代入特值，可判断 C 选项.

【详解】A 选项：$a>0$，$b>0$，$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\geq 2\sqrt{\frac{4}{ab}}$，解得 $ab\geq 16$，当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{4}{b}$，即 $a=2$，$b=8$ 时，等号成立，故 A 选项正确；

B 选项：$2a+b=(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{8a}{b}+6\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{8a}{b}}+6=6+4\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{8a}{b}$，即 $a=\sqrt{2}+1$，$b=4+2\sqrt{2}$ 时，等号成立，故 B 选项正确；

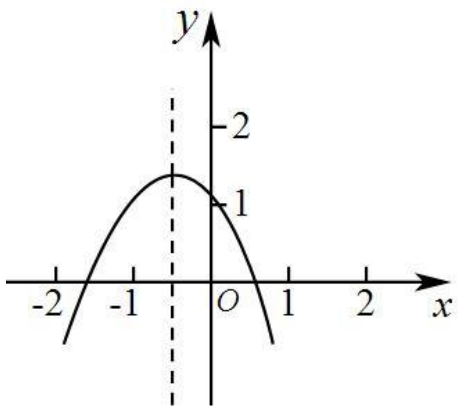
C 选项：当 $a=b=5$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$ 成立，此时 $a-b=0$，故 C 选项错误；

D 选项：$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)^2-\frac{8}{ab}=1-\frac{8}{ab}$，又 $ab\geq 16$，所以 $1-\frac{8}{ab}\geq\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}\geq\frac{1}{2}$，故 D 选项正确；

故选：C.

7. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，下列结论中正确的是（　　）

①$abc<0$；②$b^2-4ac<0$；③$2a>b$；④$a+c>b$.



A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

【答案】A

【解析】

【分析】根据图象开口方向及与坐标轴交点的情况直接判断.

【详解】由图象可知$a<0$，$c>0$，$-1<-\dfrac{b}{2a}<0$即$2a<b<0$，$\Delta=b^2-4ac>0$，

所以$abc>0$，故①，②，③错误，

$f\left(-1\right)=a-b+c>0$，则$a+c>b$，故④正确；

故选：A.

8. 已知a，b为正实数，则“$\dfrac{ab}{a+b}\le 2$”是“$ab\le 16$”的（　　）

A. 充要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】由$ab\le 16$，利用均值不等式，可证明$\dfrac{ab}{a+b}\le 2$；若$\dfrac{ab}{a+b}\le 2$，举反例可知$ab\le 16$不一定成立，即得解

【详解】由a，b为正实数，$\therefore a+b\ge 2\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时等号成立

若$ab\le 16$，可得$\dfrac{ab}{a+b}\le\dfrac{ab}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{2}\le\dfrac{1}{2}\sqrt{16}=2$，故必要性成立；

当$a=2,b=10$，此时$\dfrac{ab}{a+b}\le 2$，但$ab=20>16$，故充分性不成立；

因此“$\dfrac{ab}{a+b}\le 2$”是“$ab\le 16$”的必要不充分条件

故选：B

二、多项选择题：每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 设集合 $M=\left\{x \middle| x^2+x-6=0\right\}$，$N=\left\{x \middle| ax+2=0，a\in R\right\}$ 且 $M\cap N=N$，则实数 a 可以是（　　）

A. -1　　　　B. 1　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　D. 0

【答案】ACD

【解析】

【分析】首先求出集合 M，再根据 $M\cap N=N$，可得 $N\subseteq M$，再对 N 分类讨论，即可得解；

【详解】解：$M=\left\{x \middle| x^2+x-6=0\right\}=\{2,-3\}$，因为 $M\cap N=N$，所以 $N\subseteq M$，

因为 $N=\left\{x \middle| ax+2=0，a\in R\right\}$，所以当 $a=0$ 时，$N=\varnothing$，满足 $N\subseteq M$，

当 $a=-1$ 时 $N=\{2\}$，满足 $N\subseteq M$，

当 $a=\frac{2}{3}$ 时 $N=\{-3\}$，满足 $N\subseteq M$，

故选：ACD

10. 下列说法正确的是（　　）

A. 不等式 $(2x-1)(1-x)<0$ 的解集为 $\left\{x \mid x<\frac{1}{2}\text{或}x>1\right\}$

B. 若实数 a，b，c 满足 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

C. 若 $x\in\mathrm{R}$，则函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值为 2

D. 当 $x\in\mathrm{R}$ 时，不等式 $kx^2-kx+1>0$ 恒成立，则 k 的取值范围是 $(0,4)$

【答案】AB

【解析】

【分析】根据不含参一元二次不等式的解法解不等式，即可判定选项 A；根据不等式的性质即可判定选项 B；利用基本不等式可判定选项 C；根据不等式恒成立的解法求出 k 的范围，即可判定选项 D.

【详解】对 A，由 $(2x-1)(1-x)<0$ 解得 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$，所以 A 正确；

对 B，由于 $c^2>0$，所以可以对 $ac^2>bc^2$ 两边同除 c^2，得到 $a>b$，所以 B 正确；

对 C，由于$\sqrt{x^2+4}\geq 4$，所以$y=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geq 2$当且仅当$\sqrt{x^2+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，

即$x^2=-3$时取等号，显然不成立，所以 C 错误；

对 D，①当$k=0$时，不等式为$1>0$，恒成立；

②当$k\neq 0$时，若要使不等式$kx^2-kx+1>0$恒成立，则$\begin{cases}\Delta=k^2-4k<0\\ k>0\end{cases}$，解得$0<k<4$，

所以当$x\in \mathrm{R}$时，不等式$kx^2-kx+1>0$恒成立，则k的取值范围是$[0,4)$，所以 D 错误.

故选：AB.

11. 已知$a<b<0$，$c>0$，则（　　）

A. $\dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$　　B. $\dfrac{c}{a^2}<\dfrac{c}{b^2}$

C. $\dfrac{b}{a}<\dfrac{c-b}{c-a}$　　D. $\dfrac{a^2}{b^2}<\dfrac{a^2+c}{b^2+c}$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据已知条件，利用作差法，即可依次求解.

【详解】解：对于 A，$\because$ $a<b<0$，$c>0$，

$\therefore \dfrac{c}{a}-\dfrac{c}{b}=\dfrac{c(b-a)}{ab}>0$，即$\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$，故 A 错误，

对于 B，$\because$ $a<b<0$，$c>0$，

$\therefore a^2>b^2>0$，

$\therefore \dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{b^2}$，

$\because$ $c>0$，

$\therefore \dfrac{c}{a^2}<\dfrac{c}{b^2}$，故 B 正确，

对于 C，$\because$ $a<b<0$，$c>0$，

$\therefore \dfrac{b}{a}-\dfrac{c-b}{c-a}=\dfrac{b(c-a)-a(c-b)}{a(c-a)}=\dfrac{c(b-a)}{a(c-a)}<0$，故 C 正确，

对于 D，$\because$ $a<b<0$，$c>0$，

$\therefore a^2>b^2$，即$a^2-b^2>0$，

$\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{a^2+c}{b^2+c}=\dfrac{a^2(b^2+c)-b^2(a^2+c)}{b^2(b^2+c)}=\dfrac{c(a^2-b^2)}{b^2(b^2+c)}>0$，即$\dfrac{a^2}{b^2}>\dfrac{a^2+c}{b^2+c}$，故 D 错误.

故选：BC.

12. 若 a，$b\in(0,+\infty)$，$a+b=1$，则下列说法正确的有（　　）

A. $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$的最小值为 4

B. $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$ 的最大值为$\sqrt{6}$

C. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为$3+2\sqrt{2}$

D. $\frac{2a}{a^2+b}+\frac{b}{a+b^2}$的最大值是$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用基本不等式依次判断即得.

【详解】由 a，$b\in(0,+\infty)$，$a+b=1$，可得$a,b\in(0,1)$，

对于 A，$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$，当且仅当$a=\frac{1}{a}$，即$a=1\notin(0,1)$取等号，所以$a+\frac{1}{a}>2$，同理$b+\frac{1}{b}>2$，

故$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)>4$，故 A 错误；

对于 B，$\because\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)^2=2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\le 3+1+a+1+b=6$，当且仅当$1+a=1+b$，即$a=b=\frac{1}{2}$时取等号，

$\therefore\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\le\sqrt{6}$，即$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$ 的最大值为$\sqrt{6}$，故 B 正确；

对于 C，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+b)=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\ge 3+2\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即$a=\sqrt{2}-1,b=2-\sqrt{2}$时取等号，故$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为$3+2\sqrt{2}$，故 C 正确；

对于 D，由题可得$b=1-a$，$a\in(0,1)$，

$\therefore\frac{2a}{a^2+b}+\frac{b}{a+b^2}=\frac{2a}{a^2+1-a}+\frac{1-a}{a+(1-a)^2}=\frac{a+1}{a^2-a+1}$，

而$\frac{a^2-a+1}{a+1}=(a+1)+\frac{3}{a+1}-3\ge 2\sqrt{3}-3$，当且仅当$a+1=\frac{3}{a+1}$，即$a=\sqrt{3}-1$时取等号，

$\therefore\frac{2a}{a^2+b}+\frac{b}{a+b^2}=\frac{a+1}{a^2-a+1}\le\frac{1}{2\sqrt{3}-3}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$，即$\frac{2a}{a^2+b}+\frac{b}{a+b^2}$的最大值是

$\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确.

故选：BCD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 《墨子·经说上》上说："小故，有之不必然，无之必不然，体也，若有端，大故，有之必然，若见之成见也."这一段文字蕴含着十分丰富的逻辑思想，那么文中的"小故"指的是逻辑中的__________.（选"充分不必要条件"、"必要不充分条件"、"充要条件"、"既不充分也不必要条件"之一填空）

【答案】必要不充分条件

【解析】

【分析】根据命题的充分条件与必要条件的定义直接判断.

【详解】由"小故，有之不必然，无之必不然"，

知"小故"只是构成某一结果的几个条件中的一个或一部分条件，

故"小故"是逻辑中的必要不充分条件，

故答案为：必要不充分条件.

14. 比较大小：$\sqrt{5}-2$____________$\sqrt{3}-\sqrt{2}$（填">"或"<"）.

【答案】$<$

【解析】

【分析】由于$\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，所以通过比较$\sqrt{5}+2,\sqrt{3}+\sqrt{2}$的大小可得答案

【详解】因为$\sqrt{5}-2=\dfrac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$，

$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，

$\sqrt{5}+2>\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

所以$\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，即$\sqrt{5}-2<\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

故答案为：$<$

15. 关于x的方程$\left(1-a\right)x^2+\left(a+2\right)x-4=0$有两个不同的正根的充要条件是_________.

【答案】$1<a<2$或$a>10$

【解析】

【分析】由已知可得方程有两个正根的充要条件是$\begin{cases} a-1\neq 0 \\ -\dfrac{a+2}{1-a}>0 \\ \dfrac{-4}{1-a}>0 \\ \Delta>0 \end{cases}$，解不等式组即可.

【详解】由已知可得方程有两个正根的充要条件是$\begin{cases} a-1\neq 0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{a+2}{1-a}>0 \\ x_1x_2=\dfrac{-4}{1-a}>0 \\ \Delta=\left(a+2\right)^2-4\left(1-a\right)\cdot\left(-4\right)>0 \end{cases}$，

解得$1<a<2$或$a>10$，

故答案为：$1<a<2$或$a>10$.

16. 若命题："存在整数x使不等式$\left(kx-k^2-4\right)(x-4)<0$成立"是假命题，则实数$k$的取值范围是____________.

【答案】$[1,4]$

【解析】

【分析】设原不等式的解集为A，首先验证$k=0$与题意不符；

当$k>0$时，原不等式化为$[x-(k+\dfrac{4}{k})](x-4)<0$，再结合$k+\dfrac{4}{k}\geq 2\sqrt{k\cdot\dfrac{4}{k}}=4$可求得A，要满足题意则需$4\leq k+\dfrac{4}{k}\leq 5$，据此可求得$k$的取值范围；再求得当$k<0$时的A，然后验证是否满足题意，即可完成解答.

【详解】设不等式$\left(kx-k^2-4\right)(x-4)<0$的解集为A，

当$k=0$时，不等式$\left(kx-k^2-4\right)(x-4)<0$化为$x>4$，存在整数$x$使不等式成立，所以此时不满足题意，所以$k\neq 0$；

当$k>0$时，原不等式化为$[x-(k+\dfrac{4}{k})](x-4)<0$，

因为$k+\dfrac{4}{k}\geq 2\sqrt{k\cdot\dfrac{4}{k}}=4$，当且仅当$k=\dfrac{4}{k}$，即$k=2$时取等号，

所以$A=\{x\,|\,4<x<k+\dfrac{4}{k}\}$，

要使命题:“存在整数x使不等式$\left(kx-k^2-4\right)(x-4)<0$成立”是假命题，则需$4\le k+\dfrac{4}{k}\le 5$，

解得$1\le k\le 4$；

当$k<0$时，原不等式化为$[x-(k+\dfrac{4}{k})](x-4)>0$，

而$k+\dfrac{4}{k}=-\left(-k+\dfrac{4}{-k}\right)\le -2\sqrt{(-k)\cdot\left(\dfrac{4}{-k}\right)}=-4$，当且仅当$-k=\dfrac{4}{-k}$，即$k=-2$时取等号，

所以$A=\left(-\infty,k+\dfrac{4}{k}\right)\cup(4,+\infty)$，所以存在整数$x$使不等式$\left(kx-k^2-4\right)(x-4)<0$成立，所以$k<0$不合题意.

综上可知，实数k的取值范围是$[1,4]$.

故答案为$[1,4]$.

【点睛】本题考查一元二次不等式的解法和基本不等式的应用，关键在于对k讨论得出一元二次不等式的解的情况，再建立满足题意关于k的不等式，属于中档题.

四、解答题：本题共2小题，共28分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知集合$A=\left\{x\middle|\dfrac{x-(a-2)}{x-(a+2)}\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$.

（1）若$a=3$，求$A\cap B$；

（2）若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，求实数a的取值范围.

【答案】（1）$A\cap B=[1,2)$

（2）$[0,1]$

【解析】

【分析】（1）由$a=3$写出集合A, B，即可求出$A\cap B$；

（2）由题意可得BÜ A，画数轴列不等式组，解之即得答案.

【小问1详解】

当$a=3$时，$A=\left\{x\middle|\dfrac{x-1}{x-5}\le 0\right\}=[1,5)$，又$B=\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$，

所以$A\cap B=[1,2)$；

【小问2详解】

因为“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，所以BÜ A，

$A=\left\{x\middle|\frac{x-(a-2)}{x-(a+2)}\leq 0\right\}=[a-2,a+2)$，又 $B=\{x|-1<x<2\}$，

故 $\begin{cases}a-2\leq -1\\ a+2>2\end{cases}$，或 $\begin{cases}a-2<-1\\ a+2\geq 2\end{cases}$ 解得 $0\leq a\leq 1$，

故 a 的取值范围 $[0,1]$.

18. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

（1）若 $f(x)<0$ 的解集为 $(1,2)$，求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集；

（2）若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)>0$ 恒成立，求 $\frac{b}{a+c}$ 的最大值；

（3）若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$2x+2\bullet f(x)\bullet 2x^2-2x+4$ 恒成立，求 ab 的最大值.

【答案】（1）$(\frac{1}{2},1)$　　（2）1

（3）$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件，利用“三个二次”的关系，得到 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 1 和 2，且 $a>0$，进而求得 a,b,c 的关系，化简不等式 $cx^2+bx+a<0$ 后，求解即得;

（2）利用不等式恒成立的条件，得到 $b^2<4ac$，进而得到 $-2\sqrt{ac}\leq b\leq 2\sqrt{ac}$，从而得到结合基本不等式求得 $\frac{b}{a+c}$ 的最大值；

（3）令 $x=1$，可得 $a+b+c=4$，根据 $2x+2\leq ax^2+bx+c$ 恒成立，可以得到 $c=a+2$，进而得到 $b=2-2a$，然后利用基本不等式求得 ab 的最大值,并检验取到最大值时的条件使得不等式的另一边恒成立.

【小问 1 详解】

因为 $ax^2+bx+c<0$ 的解集（1，2），

所有 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 1 和 2，且 $a>0$.

所以 $1+2=-\frac{b}{a}$，$1\times 2=\frac{c}{a}$，故 $b=-3a$，$c=2a$，

所以 $cx^2+bx+a<0$，即 $2ax^2-3ax+a<0$，$2x^2-3x+1<0$，

所以 $\frac{1}{2}<x<1$，即不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $(\frac{1}{2},1)$.

【小问 2 详解】

因为对任意 $x\in\mathbf{R},y>0$，恒成立，所以 $\Delta=b^2-4ac<0$，即 $b^2<4ac$，

又 $a>0$，所以 $c\geq 0$，故 $-2\sqrt{ac}\leq b\leq 2\sqrt{ac}$，

所以 $\frac{b}{a+c}\leq\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\leq\frac{a+c}{a+c}=1$，

当 $c=a$， $b=2a$ 时取"="，

所以 $\frac{b}{a+c}$ 的最大值为 1.

【小问 3 详解】

令 $x=1$，则 $4\leq a+b+c\leq 4$，所以 $a+b+c=4$，

对任意 $x\in\mathbf{R}$， $2x+2\leq ax^2+bx+c$，恒成立，

所以 $ax^2+(b-2)x+c-2\geq 0$ 恒成立，

所以 $\Delta=(b-2)^2-4a(c-2)=(a+c-2)^2-4a(c-2)=(a-c+2)^2\leq 0$，

所以 $c=a+2$，此时 $b=2-2a$，

$ab=a(2-2a)=2a(1-a)=-2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}$，

当 $a=\frac{1}{2}$， $b=1$， $c=\frac{5}{2}$ 时取"="，

此时 $2x^2-2x+4-f(x)=2x^2-2x+4-(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2})=\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(x-1)^2\geq 0$ 成立；

故 ab 的最大值为 $\frac{1}{2}$.