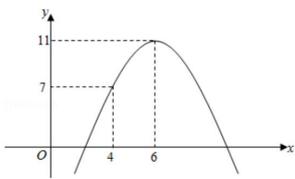


# 南师大附中 2022—2023 学年度第一学期高一 10 月月考

## 数学试卷

2022.10

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $3 \in \{1, a, a-2\}$ ，则实数  $a$  的值为( )  
 A. 3                      B. 5                      C. 3 或 5                      D. 无解
2. 设集合  $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{m | m = x + y, x \in A, y \in A\}$ ，则集合  $A$  与  $B$  的关系为( )  
 A.  $A \in B$                       B.  $A = B$                       C.  $B \subseteq A$                       D.  $A \subseteq B$
3. 若不等式  $x^2 + kx + 1 < 0$  的解集为空集，则  $k$  的取值范围是( )  
 A.  $-2 \leq k \leq 2$                       B.  $k \leq -2$  或  $k \geq 2$                       C.  $-2 < k < 2$                       D.  $k < -2$  或  $k > 2$
- 4 下面给出的四个命题中，真命题的个数为( )  
 (1)等角的余角相等；(2)一个角的补角一定大于这个角；(3)矩形的对角线互相垂直；(4)0 是最小的正整数.  
 A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4
5. 对于任意实数  $a, b, c, d$ ，下列命题中，真命题的个数为( )  
 ①若  $a > b, c \geq d$ ，则  $a - c > b - d$ ；②若  $a > b > 0, c \geq d \geq 0$ ，则  $ac > bd$ ；③若  $a > b > 0$ ，则  $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ ；  
 ④若  $a > b > 0$ ，则  $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$ .  
 A. ①②                      B. ②③                      C. ①④                      D. ①③
6. 已知关于  $x$  的不等式  $\frac{x+a}{x} \geq b$  的解集是  $[-1, 0)$ ，则  $a + b =$ ( )  
 A. -2                      B. -1                      C. 1                      D. 3
7. 如图，某汽车运输公司刚买了一批豪华大客车投入营运，据市场分析每辆客车营运的总利润  $y$ (单位：10 万元)与营运年数  $x(x \in \mathbf{N})$  为二次函数关系，若使营运的年平均利润最大，则每辆客车应营运( )  
  
 A. 3 年                      B. 4 年                      C. 6 年                      D. 5 年
8. 设非空集合  $P, Q$  满足  $P \cap Q = Q$  且  $P \neq Q$ ，则下列选项中错误的是( )



15. 已知正实数  $a, b$  满足  $ab=1$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{5}{a+b}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

16. 设  $m$  为实数, 若 “ $\exists x > 0, 4 - 2x - \frac{3}{x+1} \geq m$ ” 是假命题, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 4 小题, 共 36 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (6 分)(1)化简:  $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}(a \geq 0)$ (用分数指数幂表示);

(2)计算:  $8^{\frac{2}{3}} \times 100^{-\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{4})^{-2} \times (\frac{16}{81})^0$ .

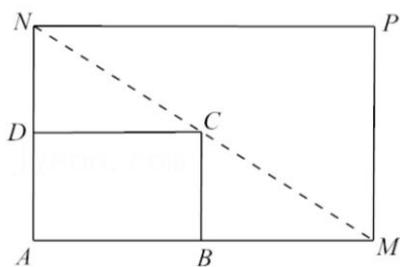
18. (10 分)(1)解不等式  $\frac{2-x}{x+3} > 1$ ;

(2)已知  $a$  是实数, 试解关于  $x$  的不等式:  $x^2 + (a-1)x - a \geq 0$ .

19. (10分)如图所示, 将一个矩形花坛  $ABCD$  扩建成一个更大的矩形花坛  $AMPN$ , 要求  $M$  在射线  $AB$  上,  $N$  在射线  $AD$  上, 且对角线  $MN$  过  $C$  点, 已知  $AB=4$  米,  $AD=3$  米, 设  $AN$  的长为  $x(x>3)$  米.

(1)要使矩形  $AMPN$  的面积大于 54 平方米, 则  $AN$  的长应在什么范围内?

(2)求当  $AM$ ,  $AN$  的长度分别是多少时, 矩形花坛  $AMPN$  的面积最小, 并求出此最小值.



20. (10分)设  $k$  为实数, 已知关于  $x$  的函数  $y=kx^2+kx-1$ .

(1)若对于  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $y \leq 0$  恒成立, 求  $k$  的取值范围;

(2)若对于  $\forall m \geq 1, \exists x \in [1, 4]$ , 满足  $y \leq m$  成立, 求  $k$  的取值范围.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $3 \in \{1, a, a-2\}$ ，则实数  $a$  的值为( )

- A. 3                  B. 5                  C. 3 或 5                  D. 无解

**【答案】B**

**【解析】** $3 \in \{1, a, a-2\}$ ,

当  $a=3$  时,那么: $a-2=1$ ,由集合元素的互异性,不满足题意.

当  $a-2=3$  时, $a=5$ ,集合为  $\{1, 5, 3\}$  满足题意.

$\therefore$  实数  $a$  的值为 5.                  故选: B.

2. 设集合  $A=\{0, 1, 2\}$ ,  $B=\{m|m=x+y, x \in A, y \in A\}$ , 则集合  $A$  与  $B$  的关系为( )

- A.  $A \in B$                   B.  $A=B$                   C.  $B \subseteq A$                   D.  $A \subseteq B$

**【答案】D**

**【解析】** $\because A=\{0, 1, 2\}, B=\{m|m=x+y, x \in A, y \in A\}=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,

$\therefore A \subseteq B$ .                  故选: D.

3. 若不等式  $x^2+kx+1 < 0$  的解集为空集, 则  $k$  的取值范围是( )

- A.  $-2 \leq k \leq 2$                   B.  $k \leq -2$  或  $k \geq 2$                   C.  $-2 < k < 2$                   D.  $k < -2$  或  $k > 2$

**【答案】A**

**【解析】** $\because$  不等式  $x^2+kx+1 < 0$  的解集为空集,  $\therefore \Delta = k^2 - 4 \leq 0$ ,  $\therefore -2 \leq k \leq 2$ .

故选: A.

4. 下面给出的四个命题中, 真命题的个数为( )

(1)等角的余角相等; (2)一个角的补角一定大于这个角; (3)矩形的对角线互相垂直; (4)0 是最小的正整数.

- A. 1                  B. 2                  C. 3                  D. 4

**【答案】A**

**【解析】**①若  $\alpha = \beta$ , 则  $90^\circ - \alpha = 90^\circ - \beta$ , 等角的余角相等 (1) 正确;

②一个角的补角一定大于这个角错误, 例如  $120^\circ$  角的补角是  $60^\circ$ ,  $60^\circ < 120^\circ$ , (2) 错误

③矩形的对角线不一定垂直; (3) 错误

④ 1 是最小的正整数 (4) 错误                  故选: A.

5. 对于任意实数  $a, b, c, d$ , 下列命题中, 真命题的个数为( )

①若  $a > b, c > d$ , 则  $a-c > b-d$ ; ②若  $a > b > 0, c > d > 0$ , 则  $ac > bd$ ; ③若  $a > b > 0$ , 则  $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ ; ④若  $a > b > 0$ , 则  $\frac{1}{2} > \frac{1}{b}$ .

- A. ①②                  B. ②③                  C. ①④                  D. ①③

**【答案】**C

**【解析】**①若  $a > b, c < d \Rightarrow -c > -d$ , 则  $a - c > b - d$ ; 故为真命题;

②若  $a > b > 0, c < d < 0$ , 则  $ac < ad < bd$ , 故为假命题;

③若  $a > b > 0$ , 则  $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ , 故为真命题;

④取  $a = 1, b = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$ , 故为假命题;

故选: C.

6. 已知关于  $x$  的不等式  $\frac{x+a}{x} \geq b$  的解集是  $[-1, 0)$ , 则  $a+b=(\quad)$

- A. -2      B. -1      C. 1      D. 3

**【答案】**C

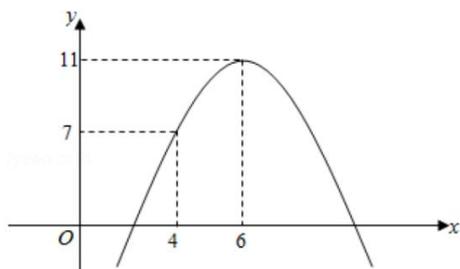
**【解析】**当  $x > 0$  时,  $\frac{x+a}{x} \geq b$  变为  $bx \leq x+a$ , 解得  $0 < x \leq \frac{a}{b-1}$ ;

当  $x < 0$  时,  $\frac{x+a}{x} \geq b$  变为  $bx \geq x+a$ , 解得  $\frac{a}{b-1} \leq x < 0$ ,

因此此不等式的解集为  $[-1, 0)$ , 所以得到  $\frac{a}{b-1} = -1$ , 解得  $a+b=1$

故选: C.

7. 如图, 某汽车运输公司刚买了一批豪华大客车投入营运, 据市场分析每辆客车营运的总利润  $y$  (单位: 10 万元) 与营运年数  $x$  ( $x \in \mathbb{N}$ ) 为二次函数关系, 若使营运的年平均利润最大, 则每辆客车应营运( )



- A. 3 年      B. 4 年      C. 6 年      D. 5 年

**【答案】**D

**【解析】**设二次函数为  $y = a(x-6)^2 + 11$  ( $a < 0$ ),

将点  $(4, 7)$  代入, 得  $a = -1$ ,

故二次函数为  $y = -x^2 + 12x - 25$ ,

则年平均利润为  $\frac{y}{x} = -\left(x + \frac{25}{x}\right) + 12 \leq -2\sqrt{x \cdot \frac{25}{x}} + 12 = 2$

当且仅当  $x = \frac{25}{x}$ , 即  $x = 5$  时, 取等号,

$\therefore$  每辆客车营运 5 年, 年平均利润最大, 最大值为 2 万元.

故选: D.

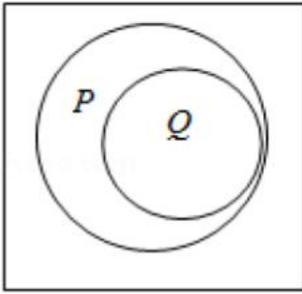
8. 设非空集合  $P, Q$  满足  $P \cap Q = Q$  且  $P \neq Q$ , 则下列选项中错误的是( )

- A.  $\forall x \in Q$ , 有  $x \in P$       B.  $\exists x \in P$ , 使得  $x \notin Q$

C.  $\exists x \in Q$ , 使得  $x \in P$

D.  $\forall x \notin Q$ , 有  $x \notin P$

**【答案】D**



**【解析】** $\because$  非空集合  $P, Q$  满足  $P \cap Q = Q$ , 且  $P \neq Q$ ,

$\therefore Q \subsetneq P$ ,

不妨设  $Q = \{1, 2\}$ ,  $P = \{1, 2, 3\}$ ,

$3 \notin Q$ , 但  $3 \in P$ , 故  $D$  错误.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。

9. 下列关系中正确的是( )

A.  $0 \in \{0\}$

B.  $\emptyset \subsetneq \{0\}$

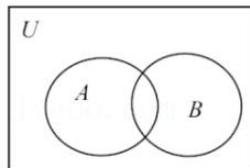
C.  $\{0, 1\} \subseteq \{(0, 1)\}$

D.  $\{(a, b)\} = \{(b, a)\}$

**【解析】** $0 \in \{0\}$ , 故  $A$  正确,  $\emptyset \subsetneq \{0\}$ , 故  $B$  正确,  $\{0, 1\}$  表示为数集,  $\{(0, 1)\}$  表示为点集, 故  $C$  错误,  $\{(a, b)\} \neq \{(b, a)\}$ , 故  $D$  错误.

故选:  $AB$ .

10. 我们知道, 如果集合  $A \subseteq S$ , 那么  $S$  的子集  $A$  的补集为  $C_S A = \{x | x \in S \text{ 且 } x \notin A\}$ , 类似地, 对于集合  $A, B$  我们把集合  $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ , 叫作集合  $A$  和  $B$  的差集, 记作  $A - B$ , 例如:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ , 则有  $A - B = \{1, 2, 3\}$ ,  $B - A = \{6, 7, 8\}$ , 下列解析正确的是( )



A. 已知  $A = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ ,  $B = \{3, 5, 6, 8, 9\}$ , 则  $B - A = \{3, 7, 8\}$

B. 如果  $A - B = \emptyset$ , 那么  $A \subseteq B$

C. 已知全集、集合  $A$ 、集合  $B$  关系如上图中所示, 则  $B - A = A \cap C_U B$

D. 已知  $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ ,  $B = \{x | -2 \leq x < 4\}$ , 则  $A - B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 4\}$

**【解析】**对  $A$ : 由定义可得  $B - A = \{3, 8\}$ , 故  $A$  错误;

对  $B$ : 如果  $A - B = \emptyset$ , 则  $A \cap B = A$ , 那么  $A \subseteq B$ , 故  $B$  正确;

对  $C$ : 如图, 阴影部分表示  $A \cap C_U B$ , 由定义阴影部分也表示  $A - B$ , 则  $A - B = A \cap C_U B$ , 故  $C$  正确;

对  $D$ : 由定义可得  $A - B = \{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 4\}$ , 故  $D$  正确;

故选:  $BCD$ .

11. 下列各结论中正确的是( )

A. “ $xy > 0$ ”是“ $\frac{x}{y} > 0$ ”的充要条件

B. 设  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 则 “ $b^2 - 4ac < 0$ ”是函数 “ $y = ax^2 + bx + c$  图像在  $x$  轴上方” 的充分不必要条件

C. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 则 “ $a = 2$ ”是 “ $(a-1)(a-2) = 0$ ” 的必要不充分条件

D. “函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图像过点  $(1, 0)$ ”是 “ $a + b + c = 0$ ” 的充要条件

**【解析】**对于 A: “ $xy > 0$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $\frac{x}{y} > 0$ ”, 故 “ $xy > 0$ ”是 “ $\frac{x}{y} > 0$ ”的充要条件, 故 A 正确;

对于 B: 当  $a = 0, b < 0$  时, 函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的图像是一条斜向下的直线; 反之则  $a > 0, b^2 - 4ac < 0$ . 所以  $a, b, c \in \mathbf{R}, b^2 - 4ac < 0$ ”是 “函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的图像在  $x$  轴上方”的既非充分非必要条件

对于 C. “ $a = 2$ 是 “ $(a-1)(a-2) = 0$ ”的充分不必要条件。故 C 错误

对于 D, 对于二次函数而言, 将  $(1, 0)$  代入, 得  $a + b + c = 0$ , 充分性得证;

反之,  $a + b + c = 0$  说明  $x = 1$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的根, 即  $(1, 0)$  是二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  经过的点, 必要性得证. D 正确.

故选: AD.

12. 若正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ , 则下列结论确的有( )

A.  $a^2 + b^2 \geq 1$

B.  $a - b > -1$

C.  $ab \leq \frac{1}{4}$

D.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

**【解析】** $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2ab \geq 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ , 当且仅当  $a = b = \frac{1}{2}$  时取等号, A 错误.

$a - b > a - (1 - a) = 2a - 1, a \in (0, 1), a - b \in (-1, 1)$ , 故 B 正确;

因为正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ , 所以  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , 当且仅当  $a = b = \frac{1}{2}$  时取等号, C 正确;

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 1 + 2\sqrt{ab} \leq 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 2$ , 当且仅当  $a = b = \frac{1}{2}$  时取等号,

故  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$ , D 正确; 故选: BCD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分.

13. 命题 “ $\forall x > 1, x^2 - x > 0$ ” 的否定是\_\_\_\_\_.

**【解析】** $\exists x > 1, x^2 - x \leq 0$

14. 设  $a$  为正实数, 已知  $x \in \mathbf{R}$ , 条件  $p: x^2 < x$ , 条件  $q: \frac{1}{x} \geq a (a > 0)$ , 若  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【解析】**因为  $x \in \mathbf{R}$ , 条件  $p: x^2 < x$ , 所以  $p$  对应的集合为  $A = (0, 1)$ ;

因为条件  $q: \frac{1}{x} \geq a (a > 0)$ , 所以  $q$  对应的集合为  $B = \left(0, \frac{1}{a}\right]$ ;

因为  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 所以  $A \subsetneq B$ , 所以  $1 \leq \frac{1}{a}$ ,

所以  $0 < a \leq 1$ , 故答案为:  $(0, 1]$ .

15. 已知正实数  $a, b$  满足  $ab = 1$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{5}{a+b}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

【解析】∵ 正实数  $a, b$  满足  $ab=1$ ,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{8}{a+b} = \frac{a+b}{ab} + \frac{5}{a+b} = (a+b) + \frac{5}{a+b} \geq 2\sqrt{(a+b) \cdot \frac{5}{a+b}} = 4\sqrt{5},$$

当且仅当  $a+b = \frac{5}{a+b}$  时取等号,

故  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{5}{a+b}$  的最小值为  $4\sqrt{5}$ ,

故答案为:  $4\sqrt{5}$ .

16. 设  $m$  为实数, 若 “ $\exists x > 0, 4 - 2x - \frac{3}{x+1} \geq m$ ” 是假命题, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【解析】 $4 - 2x - \frac{3}{x+1} = 4 - \left[ 2(x+1) + \frac{3}{x+1} \right] + 2 \leq 6 - 2\sqrt{2(x+1) \cdot \frac{3}{x+1}} = 6 - 2\sqrt{6}$

$\therefore m \leq 6 - 2\sqrt{6}$  又命题为假命题,  $\therefore m > 6 - 2\sqrt{6}$

四、解答题: 本题共 4 小题, 共 36 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (6分)(1)化简:  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$  ( $a \geq 0$ ) (用分数指数幂表示);

(2)计算:  $83 \times 100^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times \left(\frac{16}{81}\right)^0$ .

【解析】(1)  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{aa^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{aa^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{4}}} = a^{\frac{7}{8}}$

(2) 原式 =  $(2^3)^{\frac{2}{3}} \times (10^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2^{-2})^{-3} \times 1 = 2^2 \times 10^{-1} \times 2^6 \times 1 = 25.6$

18. (10分)(1)解不等式  $\frac{2-x}{x+3} > 1$ ;

(2)已知  $a$  是实数, 试解关于  $x$  的不等式:  $x^2 + (a-1)x - a \geq 0$ .

【解析】(1) ∵ 不等式  $\frac{2-x}{x+3} > 1$ ,

$\therefore \frac{2x+1}{x+3} < 0$ , 解得:  $-3 < x < -\frac{1}{2}$ ,

故不等式的解集是  $(-3, -\frac{1}{2})$ ;

(2)  $x^2 + (a-1)x - a \geq 0$ ,

即为  $(x+a)(x-1) \geq 0$ ,

与之对应的方程的根为  $x = -a$  或  $x = 1$ ,

当  $-a > 1$ , 即  $a < -1$  时, 解集为  $(-\infty, 1] \cup [-a, +\infty)$ ;

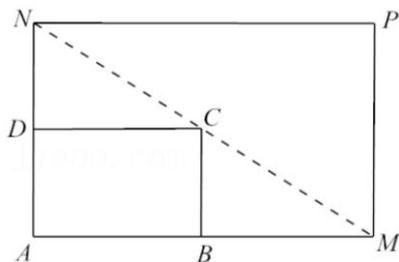
当  $-a = 1$ , 即  $a = -1$  时, 解集为  $R$ ;

当  $-a < 1$ , 即  $a > -1$  时, 解集为  $(-\infty, -a] \cup [1, +\infty)$ .

19. (10分)如图所示, 将一个矩形花坛  $ABCD$  扩建成一个更大的矩形花坛  $AMPN$ , 要求  $M$  在射线  $AB$  上,  $N$  在射线  $AD$  上, 且对角线  $MN$  过  $C$  点, 已知  $AB=4$  米,  $AD=3$  米, 设  $AN$  的长为  $x(x>3)$  米.

(1)要使矩形  $AMPN$  的面积大于 54 平方米, 则  $AN$  的长应在什么范围内?

(2)求当  $AM, AN$  的长度分别是多少时, 矩形花坛  $AMPN$  的面积最小, 并求出此最小值.



【解析】设  $AN$  的长为  $x$  米 ( $x > 3$ ),

$$\because ABCD \text{ 是矩形}, \therefore \frac{|DN|}{|AN|} = \frac{|DC|}{|AM|}, \therefore |AM| = \frac{4x}{x-3},$$

$$\therefore S_{AMPN} = |AN| \cdot |AM| = \frac{4x^2}{x-3} (x > 3).$$

(I) 由  $S_{AMPN} > 54$ , 得  $\frac{4x^2}{x-3} > 54, \therefore x > 3,$

$$\therefore (2x-9)(x-9) > 0, \text{ 解得: } 3 < x < \frac{9}{2}, \text{ 或 } x > 9,$$

即  $AN$  长的取值范围为  $(3, \frac{9}{2}) \cup (9, +\infty)$ .

(II) 令  $y = \frac{4x^2}{x-3}, t = x-3 (t > 0)$ , 则  $x = t+3,$

$$\therefore y = \frac{4(t+3)^2}{t} = 4\left(t + \frac{9}{t} + 6\right) \geq 48,$$

当且仅当  $t = \frac{9}{t} (t > 0)$ , 即  $t = 3$  时, 等号成立,

此时  $AN = 6, AM = 8$ , 最小面积为 48 平方米.

20. (10分) 设  $k$  为实数, 已知关于  $x$  的函数  $y = kx^2 + kx - 1$ .

(1) 若对于  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $y \leq 0$  恒成立, 求  $k$  的取值范围;

(2) 若对于  $\forall m \geq 1, \exists x \in [1, 4]$ , 满足  $y \leq m$  成立, 求  $k$  的取值范围.

【解析】(1) 当  $k = 0$ , 有  $-1 < 0$  恒成立;

当  $k \neq 0$  时,  $k < 0$ , 且  $\Delta = k^2 + 4k < 0$ , 解得  $-4 < k < 0$ ;

综上所述,  $k$  的取值范围为  $-4 < k \leq 0$

(2) 令  $f(x) = kx^2 + kx - 1$ .

(i) 当  $k = 0$  时,  $-1 \leq m$  恒成立

(ii) 当  $k \neq 0$  时  $f(x) = k\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}k - 1$

$$\text{对称轴 } x = -\frac{1}{2}$$

当  $k > 0$  时,  $f(x)$  在  $x \in [1, 4]$  单调递增,  $f(x)_{\min} = f(1) = 2k - 1 \leq 1 \therefore 0 < k \leq 1$

当  $k < 0$  时,  $f(x)$  在  $x \in [1, 4]$  单调递减,  $f(x)_{\min} = f(4) = 20k - 1 \leq 1$  恒成立

综上所述:  $k \leq 1$