2022-2023学年江苏省南京市田家炳高级中学高一上学期10月月考数学试卷

一、单选题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\left\{x\in Z\left|\frac{4-x}{x+2}\geq 0\right.\right\}$，$B=\left\{x\in Z\left|\frac{1}{4}\leq 2^x\leq 4\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|-1<x<2\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】先解出集合 A、B，再求 $A\cap B$．

【详解】因为 $A=\left\{x\in Z\left|\frac{4-x}{x+2}\geq 0\right.\right\}=\{-1,0,1,2,3,4\}$，$B=\left\{x\in Z\left|\frac{1}{4}\leq 2^x\leq 4\right.\right\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，

所以 $A\cap B=\{-1,0,1,2\}$．

故选：C．

2. 已知集合 $A=\{x\in N\,|\,-1<x<\ln k\}$ 共有8个子集，则实数 k 的取值范围为（　　）

A. $(0,3]$　　B. $(e,e^3]$　　C. $(e^2,e^3]$　　D. $(e^3,e^4]$

【答案】C

【解析】

【分析】先判断出集合A的元素的个数，由此列不等式来求得 k 的取值范围．

【详解】由于集合A有8个子集，所以集合A有3个元素，即 $A=\{0,1,2\}$，

所以 $2<\ln k\leq 3$，即 $\ln e^2<\ln k\leq \ln e^3, e^2<k\leq e^3$．

所以 k 的取值范围是 $(e^2,e^3]$．

故选：C

3. 已知 x，y 为非零实数，则下列不等式不恒成立的是（　　）

A. $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$　　B. $\frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2$　　C. $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$　　D. $x^2+y^2\geq 2|xy|$

【答案】B

【解析】

【分析】利用基本不等式判断A、C、D，利用特殊值判断B；

【详解】解：对于A：因为x，y为非零实数，所以$x^2+y^2\geq 2xy$，则$x^2+y^2+2xy\geq 4xy$，

即$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，当且仅当$x=y$时取等号，故A正确；

对于B：当x、y异号时$\frac{x^2+y^2}{xy}<0$，故B错误；

对于C：$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\left|\frac{1}{x}\right|\geq 2\sqrt{|x|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|}=2$，当且仅当$|x|=\left|\frac{1}{x}\right|$，即$x=\pm 1$时取等号，故C正确；

对于D：$x^2+y^2=|x|^2+|y|^2\geq 2|x|\cdot|y|=2|xy|$，当且仅当$|x|=|y|$时取等号，故D正确；

故选：B

4. 若命题“$\exists x_0\in\mathrm{R},x_0^2+(a-1)x_0+1\leq 0$”的否定是真命题，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $[-1,3]$　　B. $(-1,3)$

C. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】写出命题的否定，则$\Delta<0$，从而可得出答案.

【详解】:解：命题“$\exists x_0\in\mathrm{R},x_0^2+(a-1)x_0+1\leq 0$”的否定为“$\forall x\in\mathrm{R},x^2+(a-1)x+1>0$”为真命题，

所以$\Delta=(a-1)^2-4<0$，解得$-1<a<3$，

即实数a的取值范围是$(-1,3)$.

故选：B.

5. 下列选项中，是“$\varnothing$是集合$M=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathrm{R}\}$的真子集”成立的必要不充分条件的是（　　）

A. $a\in(-\infty,0)$　　B. $a\in(-\infty,0]$

C. $a\in(-\infty,1]$　　D. $a\in(-\infty,2)$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知 M 蛊 ，即方程 $ax^2+2x+1=0$ 有实数解，当 $a=0$ 时，符合题意，当 $a\neq 0$ 时，由 $\Delta=4-4a\geq 0$ 解得 a 的范围即为“$\varnothing$ 是集合 $M=\left\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in \mathrm{R}\right\}$ 的真子集”成立的充要条件，即为所选选项的真子集，进而可得正确选项.

【详解】若“$\varnothing$ 是集合 $M=\left\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in \mathrm{R}\right\}$ 的真子集”

所以 $M=\left\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in \mathrm{R}\right\}\neq\varnothing$，

所以方程 $ax^2+2x+1=0$ 有实数解，

当 $a=0$ 时，由 $2x+1=0$ 可得 $x=-\dfrac{1}{2}$，符合题意，

当 $a\neq 0$ 时，由 $\Delta=4-4a\geq 0$ 可得 $a\leq 1$，

所以 $a\leq 1$ 且 $a\neq 0$，

综上所述：$M=\left\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in \mathrm{R}\right\}\neq\varnothing$ 的充要条件为 $a\leq 1$；

即“$\varnothing$ 是集合 $M=\left\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in \mathrm{R}\right\}$ 的真子集”成立充要条件为 $a\leq 1$；

所选集合是 $a\leq 1$ 的必要不充分条件，则 $\left(-\infty,1\right]$ 应是所选集合的真子集，

由选项判断 A，B，C 都不正确，选项 D 正确；

故选：D.

6. 已知正数 a，b 满足 $\ln a+\ln b=\ln(a+4b)$，则 $16^{\frac{1}{a}}\times 2^{\frac{1}{b}}=$（　　）

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用指数和对数的运算性质求解即可.

【详解】由已知得 $\ln(ab)=\ln(a+4b)$，所以 $ab=a+4b$，所以 $\dfrac{a+4b}{ab}=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，

所以 $16^{\frac{1}{a}}\times 2^{\frac{1}{b}}=2^{\frac{4}{a}+\frac{1}{b}}=2$

故选：D

7. 核酸检测分析是用荧光定量 PCR 法，通过化学物质的荧光信号，对在 PCR 扩增进程中成指数级增加的靶标 DNA 实时监测，在 PCR 扩增的指数时期，荧光信号强度达到阈值时，DNA 的数量 X 与扩增次数 n 满

足 $\lg X_n = n\lg(1+p)+\lg X_0$，其中 X_0 为 DNA 的初始数量，p 为扩增效率.已知某被测标本 DNA 扩增 12 次后，数量变为原来的 1000 倍，则扩增效率 p 约为（　　）（参考数据：$10^{0.25}\approx 1.778, 10^{-0.25}\approx 0.562$）

A. 22.2%　　B. 43.8%　　C. 56.2%　　D. 77.8%

【答案】D

【解析】

【分析】由题意 $X_n = 1000X_0$，代入关系式，根据对数的运算性质及指数与对数的关系计算可得.

【详解】解：由题意知，$\lg(1000X_0)=12\lg(1+p)+\lg X_0$，

即 $\lg 10^3+\lg X_0 = 12\lg(1+p)+\lg X_0$，

即 $3+\lg X_0 = 12\lg(1+p)+\lg X_0$，

所以 $1+p=10^{0.25}\approx 1.778$，解得 $p\approx 0.778 = 77.8\%$.

故选：D.

8. 已知 $a=\log_3 \pi, b=\dfrac{1}{\log_3 \pi -1}, c=\dfrac{1}{2-\log_3 \pi}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

【答案】D

【解析】

【分析】先利用对数函数单调性求出 $a\in(1,1.5)$，从而确定 $b>2$，$c\in(1,2)$，作差法判断出 $a<c$，从而求出答案.

【详解】$a=\log_3 \pi > \log_3 3 = 1$，

因为 $3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}>\pi$，所以 $a=\log_3 \pi < \log_3 3^{\frac{3}{2}} = 1.5$，

所以 $a\in(1,1.5)$，

$\log_3 \pi -1 \in (0,0.5)$，故 $b=\dfrac{1}{\log_3 \pi -1}>2$，

$2-\log_3 \pi \in (0.5,1)$，故 $c=\dfrac{1}{2-\log_3 \pi}\in(1,2)$，

令 $a-c=\log_3 \pi - \dfrac{1}{2-\log_3 \pi} = \dfrac{2\log_3 \pi - (\log_3 \pi)^2 - 1}{2-\log_3 \pi} = \dfrac{-(\log_3 \pi -1)^2}{2-\log_3 \pi} < 0$

所以 $a<c<b$.

故选：D

二、多选题（本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.）

9. 下列说法正确的是（　　）

A. $A\cap B\neq\varnothing$ 是 $A\subseteq B$ 的既不充分也不必要条件

B. “$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$”是“$a<b$”的既不充分也不必要条件

C. 若 a，$b\in\mathbf{R}$，则“$a^2+b^2\neq0$”是“a，b 不全为0”的充要条件

D. “$a>b>0$”是“$a^n>b^n\left(n\in\mathrm{N},n\geq2\right)$”的充要条件

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据不能互相推出的情况判断A，举例说明可判断B，根据互相推出判断C；举例说明可判断D.

【详解】因为 $A\cap B\neq\varnothing$ 不能推不出 $A\subseteq B$，比如 $A=\{1,3\},B=\{1,2\}$，而 $A\subseteq B$ 时，也不能推出 $A\cap B\neq\varnothing$，比如 $A=\varnothing,B=\{1\}$，所以 $A\cap B\neq\varnothing$ 是 $A\subseteq B$ 成立的既不充分也不必要条件，故A正确；

因为 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 不能推出 $a<b$，比如 $\frac{1}{2}>\frac{1}{-3}$，但是 $2>-3$；$a<b$ 不能推出 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，比如 $-2<3$，$\frac{1}{-2}<\frac{1}{3}$，所以“$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$”是“$a<b$”的既不充分也不必要条件，故B正确；

因为 $a^2+b^2\neq0$，能推出 a，b 不全为0，a，b 不全为0也能推出 $a^2+b^2\neq0$，所以“$a^2+b^2\neq0$”是“a，b 不全为0”的充要条件，故C正确；

D. $a^n>b^n\left(n\in\mathrm{N},n\geq2\right)$ 不能推出 $a>b>0$，比如 $a=1,b=0$，$1^n>0^n\left(n\in\mathrm{N},n\geq2\right)$ 满足，但是 $a>b>0$ 不满足，所以必要性不满足，故D错误；

故选：ABC

10. 下列说法正确的是(　　)

A. 已知 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $x(1-2x)$ 的最大值为 $\frac{1}{8}$

B. 当 $x<\frac{4}{3}$ 时，$y=3x-1+\frac{1}{3x-4}$ 的最大值是1

C. 若 $1<a<3$，$2<b<5$，则 $2a-3b+1$ 的取值范围是 $\left(-4,1\right)$

D. 若 $M=2a\left(a-2\right)+7$，$N=\left(a-2\right)\left(a-3\right)$，则 $M<N$

【答案】AB

【解析】

【分析】利用基本不等式可判断 AB，利用不等式的性质可判断 C，利用作差法可判断 D.

【详解】对于选项 A，若 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $1-2x>0$，$2x>0$，

则 $x(1-2x)=\frac{1}{2}\times 2x(1-2x)\le \frac{1}{2}\times\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$，

当且仅当 $2x=1-2x$，即 $x=\frac{1}{4}$ 时，等号成立，即 $x(1-2x)$的最大值为 $\frac{1}{8}$，故 A 正确；

对于选项 B，当 $x<\frac{4}{3}$ 时，$4-3x>0$，

$\therefore y=3x-1+\frac{1}{3x-4}=-\left(4-3x+\frac{1}{4-3x}\right)+3\le -2\sqrt{(4-3x)\cdot\frac{1}{4-3x}}+3=1$，

当且仅当 $4-3x=\frac{1}{4-3x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，即 $y=3x-1+\frac{1}{3x-4}$ 的最大值是 1，故 B 正确；

对于选项 C：$\because 1<a<3$，$2<b<5$，$\therefore 2<2a<6$，$-15<-3b<-6$，

$\therefore -12<2a-3b+1<1$，故 C 错误；

对于选项 D，$\because M=2a(a-2)+7$，$N=(a-2)(a-3)$，

$\therefore M-N=(2a^2-4a+7)-(a^2-5a+6)=a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

$\therefore M>N$，故 D 错误；

故选：AB.

11. 已知 $\log_2 3=m$，$\log_3 7=n$，则 $\log_{42} 56$ 的值不可能是（　　）

A. $\frac{mn+3}{mn+1}$　　B. $\frac{m+n+3}{2m+n+1}$　　C. $\frac{mn+3}{mn+m+1}$　　D. $\frac{mn+3}{mn-m+1}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用对数运算的公式计算即可.

【详解】由换底公式得：$\log_2 7=\log_2 3\cdot\log_3 7=mn$，$\log_7 2=\frac{1}{mn}$，

$\log_{42} 56=\log_{42}(7\times 8)=\log_{42} 7+\log_{42} 8$，

其中 $\log_{42} 7=\frac{1}{\log_7 42}=\frac{1}{1+\log_7 6}=\frac{1}{1+\log_7 2+\log_7 3}=\frac{1}{1+\frac{1}{mn}+\frac{1}{n}}=\frac{mn}{mn+m+1}$，

$\log_{42}8=3\log_{42}2=\dfrac{3}{\log_2 42}=\dfrac{3}{\log_2 6+\log_2 7}=\dfrac{3}{1+m+mn}$，故

$\log_{42}56=\dfrac{mn}{mn+m+1}+\dfrac{3}{1+m+mn}=\dfrac{mn+3}{mn+m+1}$

故选：ABD.

12. 已知正数x、y、z满足$3^x=4^y=6^z$，则下列说法中正确的是（　　）

A. $x+y>\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)z$　　B. $xy>2z^2$　　C. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{z}$　　D. $3x>4y>6z$

【答案】ABC

【解析】

【分析】把指数式化成相应的对数式，运用对数的运算法则及换底公式和基本不等式可求得结果.

【详解】$x,y,z>0$，令$3^x=4^y=6^z=t(t>1)$，则$x=\log_3 t$，$y=\log_4 t$，$z=\log_6 t$.

$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}=\dfrac{\log_3 t}{\log_6 t}+\dfrac{\log_4 t}{\log_6 t}=\dfrac{\lg 6}{\lg 3}+\dfrac{\lg 6}{2\lg 2}=\dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 3}{2\lg 2}\right)>\dfrac{3}{2}+2\sqrt{\dfrac{\lg 2}{\lg 3}\times\dfrac{\lg 3}{2\lg 2}}=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$，故A正确；

$\dfrac{xy}{z^2}=\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{y}{z}=\dfrac{\lg 6}{\lg 3}\cdot\dfrac{\lg 6}{2\lg 2}=\dfrac{(\lg 2+\lg 3)^2}{2\lg 2\lg 3}=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 3}{\lg 2}\right)>1+\sqrt{\dfrac{\lg 2}{\lg 3}\times\dfrac{\lg 3}{\lg 2}}=2$，故B正确；

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{\log_3 t}+\dfrac{1}{2\log_4 t}=\log_t 3+\dfrac{1}{2}\log_t 4=\log_t 6=\dfrac{1}{z}$，故C正确；

$\dfrac{4}{x}=4\log_t 3=\log_t 81$，$\dfrac{3}{y}=3\log_t 4=\log_t 64$，因为$t>1$，所以$\dfrac{4}{x}>\dfrac{3}{y}$，即$3x<4y$，故D错误.

故选：ABC.

三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知集合$A=\{4,3,5m-6\},B=\{3,m^2\}$，若$B\subseteq A$，则实数$m=$__________.

【答案】-2或3##3或-2

【解析】

【分析】利用子集关系$B\subseteq A$可知，$4=m^2$或$5m-6=m^2$，求出m再验证即得结果.

【详解】$\because B\subseteq A$，

$\therefore 4=m^2$或$5m-6=m^2$，

解得$m=2$或$m=-2$或$m=3$，

将 m 的值代入集合 A 、 B 验证，知 $m=2$ 不符合集合的互异性，

故 $m=-2$ 或 3.

故答案为： -2 或 3.

14. 对于任意实数 a，b，c，有以下命题：

①“$a=b$”是“$ac=bc$”的充要条件；

②“$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件；

③“（$x-a$）（$x-b$）＝0”是“$x=a$”的充分条件；

④“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件.

其中正确命题的序号是__.

【答案】②④

【解析】

【分析】本题考查的知识点是必要条件、充分条件与充要条件的判断及不等式的性质，我们根据充要条件的定义对题目中的四个答案逐一进行分析即可得到答案.

【详解】解：∵①中“$a=b$”⇒“$ac=bc$”为真命题，

但当 $c=0$ 时，“$ac=bc$”⇒“$a=b$”为假命题，

故“$a=b$”是“$ac=bc$”的充分不必要条件，故①为假命题；

∵②中“$a+5$ 是无理数”⇒“a 是无理数”为真命题，

“a 是无理数”⇒“$a+5$ 是无理数”也为真命题，

故“$a+5$ 是无理数”是“a 是无理数”的充要条件，故②为真命题；

∵③“（$x-a$）（$x-b$）＝0”是“$x=a$”的必要条件，故③为假命题；

∵④中 $\{a|a<3\}$ 比 $\{a|a<5\}$ 范围小 ，故“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件，故④为真命题.

故真命题的个数为 2

故答案为：②④

15. 已知 $a=\dfrac{\sqrt{\lg 2+\lg 5-4\lg 2\lg 5}\cdot\left(\lg 27+\lg 64-e^{\ln 3}\right)}{0.3\lg 1.2\lg 2.5}$， $b=\log_3 7\cdot\log_{49}\dfrac{1}{9}$，则 $\lg a^{2020}-b^{2021}+1$ 的值为________.

【答案】2022

【解析】

【分析】化简计算得 a,b，即得解.

【详解】解：

$$a=\frac{\sqrt{1-4\lg 2(1-\lg 2)}\cdot(3\lg 3+6\lg 2-3)}{\frac{3}{10}\lg\frac{12}{10}\lg\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{1-4\lg 2+4\lg^2 2}\cdot 10(\lg 3+2\lg 2-1)}{(\lg 3+2\lg 2-1)\lg\frac{10}{4}}=\frac{10\sqrt{(1-2\lg 2)^2}}{1-2\lg 2}$$

$$=\frac{10(1-2\lg 2)}{1-2\lg 2}=10.$$

$$b=\log_3 7\cdot\log_{49}\frac{1}{9}=\frac{\lg 7}{\lg 3}\cdot\frac{\lg\frac{1}{9}}{\lg 49}=\frac{\lg 7}{\lg 3}\cdot\frac{-2\lg 3}{2\lg 7}=-1.$$

所以 $\lg a^{2020}-b^{2021}+1=\lg 10^{2020}-(-1)^{2021}+1=2020-(-1)+1=2022$

故答案为：2022

16. 已知正数 a,b 满足 $a+b=1,c\in\mathbf{R}$，则 $\frac{3a}{bc^2+b}+\frac{1}{abc^2+ab}+2c^2$ 的最小值为__________.

【答案】$4\sqrt{3}-2$

【解析】

【分析】把 $a+b=1$ 平方得到 $a^2+2ab+b^2=1,a>0,b>0$，代入结论构造基本不等式，再分析计算可求出最小值.

【详解】解：由 $a+b=1$，得 $a^2+2ab+b^2=1,a>0,b>0$，

则 $\frac{3a}{bc^2+b}+\frac{1}{abc^2+ab}+2c^2$

$$=\frac{1}{c^2+1}\left(\frac{3a}{b}+\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}\right)+2c^2$$

$$=\frac{1}{c^2+1}\left(\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+2c^2\geq\frac{1}{c^2+1}\left(2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{b}{a}}+2\right)+2c^2$$

$$=\frac{6}{c^2+1}+2(c^2+1)-2\geq 2\sqrt{\frac{6}{c^2+1}\times 2(c^2+1)}-2=4\sqrt{3}-2,$$

当且仅当 $\frac{4a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $b=2a$，$\frac{6}{c^2+1}=2(c^2+1)$，即 $(c^2+1)^2=3$ 时取“等号”，

所以当 $a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3},c^2=\sqrt{3}-1$ 时，

$\frac{3a}{bc^2+b}+\frac{1}{abc^2+ab}+2c^2$ 的最小值为 $4\sqrt{3}-2$.

故答案为：$4\sqrt{3}-2$

四、解答题（本大题共 6 题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 计算：

（1）$(4+2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-4\times 8^{-\frac{2}{3}}-\sqrt{27}\times\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^{-1}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-1}}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}}$；

（2）$\log_2 3\cdot\log_3 4+(\lg 5)^2+\lg 5\cdot\lg 20+\frac{1}{2}\lg 16-2^{\log_2 3}$.

【答案】（1）1　　（2）1

【解析】

【分析】（1）根据分数指数幂的运算法则运算求解即可；

（2）根据对数运算法则，换底公式运算求解即可.

【小问 1 详解】

解：$\left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}-4\times 8^{-\frac{2}{3}}-\sqrt{27}\times\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^{-1}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-1}}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}}$

$=\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}-4\times\left(2^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}-3^{\frac{3}{2}}\times 3^{-1}+\left(a\cdot a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\div\left(a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=1+\sqrt{3}-4\times 2^{-2}-3^{\frac{1}{2}}+(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\div(a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=1+\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+1$

$=1$.

【小问 2 详解】

解：$\log_2 3\cdot\log_3 4+(\lg 5)^2+\lg 5\cdot\lg 20+\frac{1}{2}\lg 16-2^{\log_2 3}$

$=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}+\lg 5(\lg 5+\lg 20)+\frac{1}{2}\lg 2^4-3$

$=\frac{2\lg 2}{\lg 2}+\lg 5\cdot\lg(5\times 20)+2\lg 2-3$

$=2+2\lg 5+2\lg 2-3$

$=2\lg 10-1$

$=1$.

18. 解下列不等式：

（1）$6-2x\le x^2-3x<18$；

（2）$\dfrac{x+1}{3x-2} \geq 2$；

（3）$x^2-3|x|+2>0$.

【答案】（1）$\{x|-3<x\leq -2$ 或 $3\leq x<6\}$

（2）$\left\{x \middle| \dfrac{2}{3}<x\leq 1\right\}$

（3）$\{x|x<-2$ 或 $-1<x<1$ 或 $x>2\}$

【解析】

【分析】（1）原不等式等价于$\begin{cases}6-2x\leq x^2-3x\\x^2-3x<18\end{cases}$解不等式组可得答案；

（2）作差然后通分再解不等式可得答案；

（3）分 $x\geq 0, x<0$ 讨论去绝对值可得答案.

【小问 1 详解】

原不等式等价于$\begin{cases}6-2x\leq x^2-3x\\x^2-3x<18\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2-x-6\geq 0\\x^2-3x-18<0\end{cases}$，

即$\begin{cases}(x-3)(x+2)\geq 0\\(x-6)(x+3)<0\end{cases}$，所以$\begin{cases}x\leq -2\text{或}x\geq 3\\-3<x<6\end{cases}$，

所以 $-3<x\leq -2$ 或 $3\leqslant x<6$，所以原不等式的解集$\{x|-3<x\leq -2$ 或 $3\leq x<6\}$；

【小问 2 详解】

由 $\dfrac{x+1}{3x-2}\geq 2$，可得 $\dfrac{x+1}{3x-2}-2=\dfrac{-5x+5}{3x-2}\geq 0$，

所以$\begin{cases}(5x-5)(3x-2)\leq 0\\3x-2\neq 0\end{cases}$，解得 $\dfrac{2}{3}<x\leq 1$，

所以原不等式的解集为$\left\{x \middle| \dfrac{2}{3}<x\leq 1\right\}$；

【小问 3 详解】

原不等式等价于$\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x\geq 0\end{cases}$或$\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x<0\end{cases}$，

分别解这两个不等式组，得 $0\leq x<1$ 或 $x>2$ 或 $-1<x<0$ 或 $x<-2$，

故原不等式的解集为$\{x|x<-2$ 或 $-1<x<1$ 或 $x>2\}$.

19. 已知集合 $A=\{x||x-1|\le 3\}$ ， $B=\{x|x^2-2mx+m^2-4\le 0\}$.

（1）命题 p：$x\in A$，命题 q: $x\in B$，且 p 是 q 的必要非充分条件，求实数 m 的取值范围:

（2）若 $A\cap B\ne\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

【答案】（1） $m\in[0,2]$

（2） $m\in[-4,6]$

【解析】

【分析】(1)要使 p 是 q 的必要不充分条件，则 B A 即可；

(2)求 $A\cap B=\varnothing$ 时 m 的取值范围，然后求其补集.

【小问 1 详解】

因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 B A，

B 集合： $\Delta=4m^2-4(m^2-4)=16>0$ ，所以 B 不可能为空集，

因为 $x^2-2mx+m^2-4=[x-(m-2)][x-(m+2)]$ ，

所以 $B=\{x|m-2\le x\le m+2\}$ ，

集合 $A=\{x|-2\le x\le 4\}$ ，

所以 $\begin{cases}m-2\ge -2\\ m+2<4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-2>-2\\ m+2\le 4\end{cases}$ ，分别解不等式组，取并集后可得 $m\in[0,2]$.

【小问 2 详解】

由（1）知 $A=\{x|-2\le x\le 4\}$，$B=\{x|m-2\le x\le m+2\}$ ，

当 $A\cap B=\varnothing$ 时： $m+2<-2$ 或 $m-2>4$ ，

解之得： $m<-4$ 或 $m>6$ ，

则 $A\cap B\ne\varnothing$ 时， $m\in[-4,6]$.

20. 已知 $f(x)=|x-1|+|2x+3|$.

（1）求不等式 $f(x)>4$ 的解集；

（2）设 $f(x)$ 的最小值为 m ， $a+b=m$ ， $a>0$ ， $b>0$ ，求 $\dfrac{2}{2a+1}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值.

【答案】（1） $\{x|x<-2$ 或 $x<0\}$

（2）$\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】（1）根据题意可得 $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+2,x>1\\x+4,-\frac{3}{2}<x\le 1\\-3x-2,x\le -\frac{3}{2}\end{cases}$，分类讨论求解；（2）根据（1）易得 $m=\frac{5}{2}$，注意由 $a+b=\frac{5}{2}$，得 $\frac{1}{6}\left[\left(2a+1\right)+2b\right]=1$，再利用基本不等式求解.

【小问 1 详解】

根据题意可得：$f\left(x\right)=\left|x-1\right|+\left|2x+3\right|=\begin{cases}3x+2,x>1\\x+4,-\frac{3}{2}<x\le 1\\-3x-2,x\le -\frac{3}{2}\end{cases}$

当 $x\le -\frac{3}{2}$ 时，$-3x-2>4$，得 $x<-2$

当 $-\frac{3}{2}<x\le 1$ 时，$x+4>4$，得 $0<x\le 1$

当 $x>1$ 时，$3x+2>4$，得 $x>1$

综上所述：不等式 $f\left(x\right)>4$ 的解集为 $\left\{x\left|x<-2\right.\text{ 或 }x<0\right\}$

【小问 2 详解】

由（1）知 $f\left(x\right)=\begin{cases}-3x-2,x\le -\frac{3}{2}\\x+4,-\frac{3}{2}<x\le 1\\3x+2,x>1\end{cases}$，$\therefore m=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

即 $a+b=\frac{5}{2}$，$\therefore \frac{1}{6}\left[\left(2a+1\right)+2b\right]=1$，

$\therefore \frac{2}{2a+1}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}\left[\left(2a+1\right)+2b\right]\left(\frac{2}{2a+1}+\frac{1}{b}\right)$

$=\frac{1}{6}\left(4+\frac{4b}{2a+1}+\frac{2a+1}{b}\right)\ge \frac{1}{6}\left(4+2\sqrt{\frac{4b}{2a+1}\cdot\frac{2a+1}{b}}\right)=\frac{4}{3}$，

当且仅当 $a=1$，$b=\dfrac{3}{2}$ 时，取等号.

所以 $\dfrac{2}{2a+1}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 $\dfrac{4}{3}$.

21. 设函数 $f\left(x\right)=mx^2-mx-1$.

（1）若对于 x Î $\left[-2,2\right]$，$f\left(x\right)<-m+5$ 恒成立，求 m 的取值范围；

（2）若对于 $m\in\left[-2,2\right]$，$f\left(x\right)<-m+5$ 恒成立，求 x 的取值范围.

【答案】（1）$\left(-\infty,\dfrac{6}{7}\right)$

（2）$\left(-1,2\right)$

【解析】

【分析】（1）根据已知可得 $mx^2-mx+m-6<0$ 对于 x Î $\left[-2,2\right]$ 恒成立，分离参数 m，构造函数 $h(x)$，求解函数 $h(x)$ 的最小值即可；

（2）根据已知可得对于 $m\in\left[-2,2\right]$，$m\left(x^2-x+1\right)-6<0$ 恒成立，构造关于 m 的函数 $g(m)$，由 $\begin{cases}g\left(-2\right)<0\\g\left(2\right)<0\end{cases}$ 即可求解 x 的取值范围.

【小问 1 详解】

解：若对于 x Î $\left[-2,2\right]$，$f\left(x\right)<-m+5$ 恒成立，即 $mx^2-mx+m-6<0$ 对于 x Î $\left[-2,2\right]$ 恒成立，

即 $m<\dfrac{6}{x^2-x+1}$ 对于 x Î $\left[-2,2\right]$ 恒成立.

令 $h\left(x\right)=\dfrac{6}{x^2-x+1}=\dfrac{6}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$，$x$ Î $\left[-2,2\right]$，则 $h\left(x\right)_{\min}=h(-2)=\dfrac{6}{\dfrac{25}{4}+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{6}{7}$，故 $m<\dfrac{6}{7}$，

所以 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{6}{7}\right)$.

【小问 2 详解】

解：对于 $m\in\left[-2,2\right]$，$f\left(x\right)<-m+5$ 恒成立，即 $mx^2-mx-1<-m+5$ 恒成立，故 $m\left(x^2-x+1\right)-6<0$ 恒成立，

令 $g\left(m\right)=m\left(x^2-x+1\right)-6$，则 $\begin{cases}g\left(-2\right)=-2\left(x^2-x+1\right)-6<0\\g\left(2\right)=2\left(x^2-x+1\right)-6<0\end{cases}$，解得 $-1<x<2$，

所以 x 的取值范围为 $(-1,2)$.

22. 党中央国务院对节能减排高度重视，各地区各部门认真贯彻党中央国务院关于“十三五”节能排的决策部署，把节能减排作为转换发展方式，经济提质增效，建设生态文明的重要抓手，取得重要进展.新能源汽车环保节能以电代油，减少排放，既符合我国国情，也代表了汽车产业发展的方向为了响应国家节能减排的号召，2021 年某企业计划引进新能源汽车生产设备，通过市场分析：全年需投入固定成本 2500 万元.每生产 x（百辆）新能源汽车，需另投入成本 $C(x)$万元，且 $C(x)=\begin{cases}10x^2+500x0<x<40\\901x+\dfrac{6400}{x}-6300x>40\end{cases}$，由市场调研知，每辆车售价 9 万元，且生产的车辆当年能全部销售完.

（1）请写出 2021 年的利润 $L(x)$（万元）关于年产量 x（百辆）的函数关系式;（利润=销售－成本）

（2）当 2021 年产量为多少百辆时，企业所获利润最大？并求出最大利润.

【答案】（1） $L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-2500,0<x<40\\3800-\left(x+\dfrac{6400}{x}\right),x\geq 40\end{cases}$

（2）2021 年生产 80 百辆时，该企业获得利润最大，且最大利润为 3640 万元

【解析】

【分析】（1）由所给函数模型写出函数式，需分段求解;

（2）分别由二次函数的性质和基本不等式求得最大值后比较可得.

【小问 1 详解】

当 $0<x<40$ 时，$L(x)=9\times100x-10x^2-500x-2500=-10^2+400x-2500$;

当 $x\geq 40$ 时，$L(x)=9\times100x-901x-\dfrac{6400}{x}+6300-2500=3800-\left(x+\dfrac{6400}{x}\right)$;

所以 $L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-2500,0<x<40\\3800-\left(x+\dfrac{6400}{x}\right),x\geq 40\end{cases}$

【小问 2 详解】

当 $0<x<40$ 时，$L(x)=-10(x-20)^2+1500$,

当 $x=20$ 时，$L(x)_{\max}=1500$;

当 $x\geq 40$ 时，$L(x)=3800-\left(x+\dfrac{6400}{x}\right)\leq 3800-2\sqrt{x\dfrac{6400}{x}}=3800-160=3640$

（当且仅当 $x=\frac{6400}{x}$ 即 $x=80$ 时，“$=$”成立）

因为 $3640>1500$

所以，当 $x=80$ 时，即 2021 年生产 80 百辆时，该企业获得利润最大，且最大利润为 3640 万元.

答：（1）2021 年的利润 $L\left(x\right)$（万元）关于年产量 x（百辆）的函数关系式为

$$L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-2500,0<x<40\\3800-\left(x+\dfrac{10000}{x}\right),x\geq 40\end{cases}.$$

（2）当 $x=80$ 时，即 2021 年生产 80 百辆时，该企业获得利润最大，且最大利润为 3640 万元.