

金陵中学 2022—2023 学年第一学期高一学情调研测试

数学试卷

2022.10

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 给出下列关系：① $\pi \in \mathbf{R}$ ；② $\sqrt{3} \in \mathbf{Q}$ ；③ $-3 \notin \mathbf{Z}$ ；④ $|-3| \notin \mathbf{N}$ ；⑤ $0 \notin \mathbf{Q}$ ，其中正确的个数

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, a^2\}$, 若 $A \cap B = \{1\}$, 则实数 a 的值为

- A. 1 B. -1 C. ± 1 D. $-\sqrt{2}$

3. 若命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x - m = 0$ ” 是真命题，则实数 m 的取值范围是

- A. $[-\frac{1}{4}, 0]$ B. $[0, \frac{1}{4}]$ C. $[-\frac{1}{4}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{4}]$

4. 集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | a < x < b\}$, 若 “ $a = -2$ ” 是 “ $A \cap B \neq \emptyset$ ” 的充分条件，则 b 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(-1, 2)$

5. 已知集合 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, $B = \{x | ax + 1 \leq 0\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[-\frac{1}{3}, 1)$ B. $[-\frac{1}{3}, 1]$ C. $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ D. $[-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, 1)$

6. 若 $p: a \in \mathbf{R}$ 且 $-1 < a < 1$, $q: \text{二次函数 } y = x^2 + (a+1)x + a - 2 \text{ 的两个零点一个大于零, 另一个小于零}$, 则 p 是 q 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

7. 关于 x 的不等式 $ax^2 - |x| + 2a \geq 0$ 的解集是 $(-\infty, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围为

- A. $[\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{4}]$
 C. $[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$ D. $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{4}] \cup [\frac{9}{4}, +\infty)$

8. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = 1$, 不等式 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{m}{a+b} \geq 4$ 恒成立, 则正实数 m 的取值范围是

- A. $[2, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$ C. $[6, +\infty)$ D. $[8, +\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的是

- A. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 > -1$ ” 的否定是 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 < -1$ ”
 B. 命题 “ $\exists x \in (-3, +\infty), x^2 \leq 9$ ” 的否定是 “ $\forall x \in (-3, +\infty), x^2 > 9$ ”
 C. “ $|x| > |y|$ ” 是 “ $x > y$ ” 的必要条件
 D. “ $m < 0$ ” 是 “关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有一正一负根” 的充要条件

10. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 则使 $A \subseteq C_U B$ 成立的实数 m 的取值范围可以是

- A. $\{m | 6 < m \leq 10\}$ B. $\{m | -2 < m < 2\}$ C. $\{m | -2 < m < -\frac{1}{2}\}$ D. $\{m | 5 < m \leq 8\}$

11. 已知 $a > 0, b > 0, a^2 + b^2 - ab = 1$, 则下列不等式恒成立的是

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$ B. $a + b \geq 2$ C. $a^2 + b^2 \geq 2$ D. $a^3 + b^3 \leq 2$

12. 设非空集合 $S = \{x | m \leq x \leq n\}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$. 若集合 S 满足: 当 $x \in S$ 时, 有 $x^2 \in S$. 给出如下命题, 其中真命题的是

- A. 若 $m = 1$, 则 $S = \{x | x \geq 1\}$ B. 若 $m = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{4} \leq n \leq 1$

- C. 若 $n = \frac{1}{2}$, 则 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 0$ D. 若 $n = 1$, 则 $-1 \leq m \leq 0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知集合 $A = \{x | (a-1)x^2 + 8x + 2 = 0\}$, 若 A 的子集个数为 2 个, 则实数 $a =$ ▲ .
14. 若 $-1 < a + b < 3$, $2 < a - b < 4$, $t = 2a + 3b$, 则 t 的取值范围为 ▲ .
15. 已知正实数 x, y 满足 $x + 2y = 3$, 则 xy 的最大值为 ▲ , $\frac{x^2 + 3y}{xy}$ 最小值为 ▲ .
16. 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, $2x + 2 \leq ax^2 + bx + c \leq 2x^2 - 2x + 4$ 恒成立, 则 ab 的最大值为 ▲ .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在实数范围内解下列方程：

(1) $\sqrt{x+7} - x = 1$;

(2) $x^3 - 2x + 1 = 0$.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $p: -2 \leq x \leq 6$, $q: 1 - m \leq x \leq 1 + m$, $m > 0$.

- (1) 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若 p 是 q 的必要条件, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

设集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 $a=0$, 求 $A \cup B$;

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

已知正数 a, b 满足 $a + b - ab = 0$.

(1) 求 $4a + b$ 的最小值;

(2) 求 $\frac{a}{a-1} + \frac{9b}{b-1}$ 的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

设函数 $y = ax^2 - (2a+3)x + 6$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $y=0$ 的解集是 $\{2, 3\}$, 求实数 a 的值:

(2) 若 $y+2 > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围:

(3) 当 $a=1$ 时, $\forall t > -2$, 关于 x 的不等式 $y \leq -3x + 3 + m$ 在 $[-2, 1]$ 有解, 求实数 m 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

设函数 $y = ax^2 + x - b$ ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $b = a - \frac{5}{4}$, 且集合 $\{x|y=0\}$ 中有且只有一个元素, 求实数 a 的取值集合:

(2) 当 $a \geq 1$, $b > 1$ 时, 记不等式 $y \geq 0$ 的解集为 P , 集合 $Q = \{x | -2-t < x < -2+t\}$. 若对于任意正数 t , $P \cap Q \neq \emptyset$, 求 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 的最大值.