金陵中学 2022—2023 学年第一学期高一学情调研测试

数学试卷　　2022.10

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．给出下列关系：①$\pi\in\mathbf{R}$；②$\sqrt{3}\in\mathbf{Q}$；③$-3\notin\mathbf{Z}$；(4)$|-3|\notin\mathbf{N}$；⑤$0\notin\mathbf{Q}$，其中正确的个数

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】A

【解析】仅有$\pi\in\mathbf{R}$正确，故选 A.

2．已知集合 $A=\{1，2\}$，$B=\{a，a^2\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则实数 a 的值为

A．1　　B．-1　　C．±1　　D．$-\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】因为 $A\cap B=\{1\}$，且 $a\neq a^2$，所以 $a=-1$，故选 B.

3．若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x-m=0$”是真命题，则实数 m 的取值范围是

A．$[-\frac{1}{4}，0]$　　B．$[0，\frac{1}{4}]$　　C．$[-\frac{1}{4}，+\infty)$　　D．$(-\infty，\frac{1}{4}]$

【答案】C

【解析】$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x-m=0$ 为真，则$\Delta=(-1)^2+4m\geqslant0$，解得 $m\geqslant-\frac{1}{4}$，故选 C.

4．集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|a<x<b\}$，若“$a=-2$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分条件，则 b 的取值范围是

A．$(-\infty，-1)$　　B．$(-1，+\infty)$　　C．$[-1，+\infty)$　　D．$(-1，2)$

【答案】B

【解析】由题意 $b>-1$，故选 B．

5．已知集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 3\}$，$B=\{x|ax+1\leqslant 0\}$．若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围是

A．$[-\frac{1}{3}，1)$　　B．$[-\frac{1}{3}，1]$　C．$(-\infty，-1)\cup[0，+\infty)$　　D．$[-\frac{1}{3}，0)\cup(0，1)$

【答案】A

【解析】法 1：$a=0$ 时，$B=\varnothing$，满足，故 D 错误，$a=1$ 时，$B=\{x|x\leqslant -1\}$不满足，故选 A．

法 2：$a=0$ 时，$B=\varnothing$，满足；

$a>0$ 时，$B=\{x|ax+1\leqslant 0\}=\{x|x\leqslant -\frac{1}{a}\}$▪$\{x|x<-1$或 $x\geqslant 3\}$，所$-\frac{1}{a}<-1$，解得 $0<a<1$；

当 $a<0$ 时，$B=\{x|ax+1\leqslant 0\}=\{x|x\geqslant -\frac{1}{a}\}$▪$\{x|x<-1$或 $x\geqslant 3\}$，所以$-\frac{1}{a}\geqslant 3$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant a<0$，

所以实数 a 的取值范围是$[-\frac{1}{3}，1)$，故选 A．

6．若 p：$a\in\mathbf{R}$ 且$-1<a<1$，q：二次函数$y=x^2+(a+1)x+a-2$的两个零点一个大于零，另一个小于零，则 p 是 q 的

A．充分不必要条件　　　　　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　　　D．既不充分又不必要条件

【答案】A

【解析】若关于 x 的一元二次方程$x^2+(a+1)x+a-2=0$的一个根大于零，另一根小于零则 $y(0)=a-2<0$，所以 $a<2$，$(-1，1)$↘$(-\infty，2)$，所以 p 是 q 的充分不必要条件，故选 A．

7．关于 x 的不等式$ax^2-|x|+2a\geqslant 0$的解集是$(-\infty，+\infty)$，则实数 a 的取值范围为

A．$[\frac{\sqrt{2}}{4}，+\infty)$　　　　B．$(-\infty，\frac{\sqrt{2}}{4}]$

C．$[-\frac{\sqrt{2}}{4}，\frac{\sqrt{2}}{4}]$　　　　D．$(-\infty，-\frac{\sqrt{2}}{4}]\cup[\frac{9}{4}，+\infty)$

【答案】A

【解析】法 1：$y(a)=ax^2-|x|+2$关于 a 单调递增，故选 A．

法 2：关于 x 的不等式$ax^2-|x|+2a\geqslant 0$的解集是$(-\infty,+\infty)$，即对于$\forall t\in[0,+\infty)$，$at^2-t+2a\geqslant 0$，所以 $t=0$ 时，$2a\geqslant 0$，$a\geqslant 0$，$a=0$ 时，$-t\geqslant 0$，则 $t\leqslant 0$ 不合题意，舍去；当 $a>0$ 时，$\Delta=1-8a^2\leqslant 0$，所以$a\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故选 A．

法 3：关于 x 的不等式 $ax^2-|x|+2a\geqslant 0$ 的解集是$(-\infty,+\infty)$，即对于$\forall t\in[0,+\infty)$，$at^2-t+2a\geqslant 0$，即 $a\geqslant\dfrac{t}{t^2+2}$，且$\left(\dfrac{t}{t^2+2}\right)_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故选 A．

8．已知 $a>0$，$b>0$，且 $ab=1$，不等式$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{m}{a+b}\geqslant 4$ 恒成立，则正实数 m 的取值范围是

A．$[2,+\infty)$　　B．$[4,+\infty)$　　C．$[6,+\infty)$　　D．$[8,+\infty)$

【答案】D

【解析】$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{m}{a+b}=\dfrac{a+b}{2ab}+\dfrac{m}{a+b}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{m}{a+b}\geqslant 4$，所以 $m\geqslant 4(a+b)-\dfrac{(a+b)^2}{2}$，设 $x=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2$，$m\geqslant 4x-\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $m\geqslant\left(4x-\dfrac{1}{2}x^2\right)_{\max}=8$，故选 D．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．下列说法正确的是

A．命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>-1$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2<-1$”

B．命题“$\exists x\in(-3,+\infty)$，$x^2\leqslant 9$”的否定是“$\forall x\in(-3,+\infty)$，$x^2>9$”

C．“$|x|>|y|$”是“$x>y$”的必要条件

D．“$m<0$”是“关于 x 的方程$x^2-2x+m=0$有一正一负根”的充要条件

【答案】BD

【解析】A．命题“$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2>-1$”的否定是“$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2\leqslant -1$”错误；B．正确；C．$1>-1$，但$|1|=|-1|$，故错误；D．关于 x 的方程$x^2-2x+m=-0$有一正一负根等价于 $m<0$ 正确．故选 BD．

10．已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，则使 $A\subseteq C_UB$ 成立的实数 m 的取值范围可以是

A．$\{m|6<m\leqslant 10\}$　　B．$\{m|-2<m<2\}$　　C．$\{m|-2<m<-\frac{1}{2}\}$　D．$\{m|5<m\leqslant 8\}$

【答案】ABC

【解析】当 $B=\varnothing$ 时，$m+1>2m-1$，即 $m<2$，此时 $C_UB=\mathbf{R}$，符合题意，当 $B\neq\varnothing$ 时，$m+1\leqslant 2m-1$，即 $m\geqslant 2$，$C_UB=\{x|x<m+1$ 或 $x>2m-1\}$，因为 A▪C_UB，所以 $m-1>7$ 或 $2m-1<-2$，解得 $m>6$．所以实数 m 的取值范围为$\{m|m<2$ 或 $m>6\}$．故选 ABC．

11．已知 $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2-ab=1$，则下列不等式恒成立的是

A．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$　　B．$a+b\geqslant 2$　　C．$a^2+b^2\geqslant 2$　　D．$a^3+b^3\leqslant 2$

【答案】AD

【解析】法 1：令$b=\frac{1}{2}$，$a^2-\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}=0$，$a>0$，解得$a=\frac{1+\sqrt{13}}{4}<\frac{\sqrt{7}}{2}<\frac{3}{2}$，所以 BC 错误，故选 AD．

法 2：因为 $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2-ab=1\geqslant ab$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}\geqslant 2$，所以 A 正确，$a^2+b^2=1+ab\leqslant 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时取“$=$”，所以 C 错误；$1=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab\geqslant(a+b)^2-\frac{3(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}(a+b)^2$，所以 $a+b\leqslant 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时取“$=$”，所以 B 错误；$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=a+b\leqslant 2$，所以 D 正确．故选 AD．

12．设非空集合 $S=\{x|m\leqslant x\leqslant n\}$，其中 m，$n\in\mathbf{R}$．若集合 S 满足：当 $x\in S$ 时，有$x^2\in S$．给出如下命题，其中真命题的是

A．若 $m=1$，则 $S=\{x|x\geqslant 1\}$　　　B．若$m=-\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{4}\leqslant n\leqslant 1$

C．若$n=\frac{1}{2}$，则$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$　　　D．若 $n=1$，则$-1\leqslant m\leqslant 0$

【答案】BC

【解析】$m=n=1$ 时，$S=\{1\}$满足，故 AD 错误，选 BC．

事实上 B．$m=-\frac{1}{2}$，则$S=\{x|-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant n\}$，则$(-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}\in S$，所以$n\geqslant\frac{1}{4}$，且$n^2\leqslant n$，所以$\frac{1}{4}\leqslant n\leqslant 1$，故 B 正确：C．若$n=\frac{1}{2}$，则$m^2\leqslant n=\frac{1}{2}$，则$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$，且$m\leqslant m^2$，所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$，故 C 正确．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知集合$A=\{x|(a-1)x^2+8x+2=0\}$，若 A 的子集个数为 2 个，则实数 $a=$___▲___．

【答案】1 或 9

【解析】因为 A 的子集个数为 2 个，所以 A 中只有 1 个元素．当 $a-1=0$ 时，即 $a=1$ 时，$(a-1)x^2+8x+2=0$，即 $8x+2=0,x=-\frac{1}{4}$，满足条件；

当 $a-1\neq 0$ 时，即 $a\neq 1$ 时，$(a-1)x^2+8x+2=0$有两重根，$\Delta=64-8(a-1)=72-8a=0$，解得 $a=9$．综上实数 a 的值为 1 或 9．

14．若$-1<a+b<3$，$2<a-b<4$，$t=2a+3b$，则 t 的取值范围为___▲___．

【答案】$(-\frac{9}{2}，\frac{13}{2})$

【解析】$-\frac{5}{2}<\frac{5}{2}(a+b)<\frac{15}{2}$，$-2<-\frac{1}{2}(a-b)<-1$，所以$-\frac{9}{2}<\frac{5}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)<\frac{13}{2}$，即$-\frac{9}{2}<2a+3b=t<\frac{13}{2}$．所以 t 的取值范围$(-\frac{9}{2}，\frac{13}{2})$．

15．已知正实数 x，y 满足 $x+2y=3$，则 xy 的最大值为___▲___，$\frac{x^2+3y}{xy}$最小值为___▲___．

【答案】$\frac{9}{8}$；$2\sqrt{2}+1$

【解析】对正数 x，y，$3=x+2y\geqslant 2\sqrt{2x}$，所以$xy\leqslant\frac{9}{8}$，当且仅当$x=2y=\frac{3}{2}$时，取“＝”，所以 xy 的最大值为$\frac{9}{8}$.$\frac{x^2+3y}{xy}=\frac{x^2+(x+2y)y}{xy}=\frac{x^2+xy+2y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}+1\geqslant 2\sqrt{2}+1$，当且仅当 $x+2y=3$，且$\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$时取“＝”，$\frac{x^2+3y}{xy}$的最小值为$2\sqrt{2}+1$.

16．若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$2x+2\leqslant ax^2+bx+c\leqslant 2x^2-2x+4$恒成立，则 ab 的最大值为___▲___.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】令 $x=1$，则 $4\leqslant a+b+c\leqslant 4$，故 $a+b+c=4$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$2x+2\leqslant ax^2+bx+c$，则$ax^2+(b-2)x+c-2\geqslant 0$恒成立，

所以$\Delta=(b-2)^2-4a(c-2)=(a+c-2)^2-4a(c-2)=(a-c+2)^2=0$，所以 $c=a+2$，此时 $b=2-2a$.所以 $ab=a(2-2a)=2a(1-a)=-2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,当$a=\frac{1}{2}$，$b=1$，$c=\frac{5}{2}$时,取“＝”，此时$2x^2-2x+4-(ax^2+bx+c)=\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(x-1)^2\geqslant 0$成立，所以 ab 的最大值为$\frac{1}{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(本小题满分 10 分)

在实数范围内解下列方程：

(1)$\sqrt{x+7}-x=1$；

(2)$x^3-2x+1=0$.

解：(1)$\sqrt{x+7}=x+1$等价于 $x+7=x^2+2x+1$，$x+7\geqslant 1$，$x+1\geqslant 0$. 即$\begin{cases}x^2+x-6=0,\\x\geqslant -6,\\x\geqslant -1\end{cases}$，

所以 $x=2$.

(2)易观察 $x^3-2x+1=0$ 有 1 个根为 1，则 $x^3-2x+1=0$，即$(x-1)(x^2+x-1)=0$，

所以 $x-1=0$ 或 $x^2+x-1=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$或 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

18．(本小题满分 12 分)

已知 p：$-2\leqslant x\leqslant 6$，q：$1-m\leqslant x\leqslant 1+m$，$m>0$.

(1)若 p 是 q 的充分条件，求实数 m 的取值范围；

(2)若 p 是 q 的必要条件，求实数 m 的取值范围.

解：因为 $m>0$，所以 $1-m<1+m$，不妨设 $P=[-2，6]$，$Q=[1-m，1+m]$，

(1)p 是 q 的充分条件，则 $P\subseteq Q$，

所以$\begin{cases}1-m\leqslant -2,\\1+m\geqslant 6,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m\geqslant 3,\\m\geqslant 5,\end{cases}$ 所以 $m\geqslant 5$，

所以 m 的取值范围是$[5，+\infty)$，

(2)p 是 q 的必要条件，则 $Q\subseteq P$，

所以$\begin{cases}1-m\geqslant -2,\\1+m\leqslant 6,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant 3$，又因为 $m>0$，

所以 m 的取值范围是$(0，3]$.

19．(本小题满分 12 分)

设集合$A=\{x\in\mathbf{R}|x^2+4x=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0，a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 $a=0$，求 $A\cup B$；

(2)若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

解：(1)$A=\{x\in\mathbf{R}|^2+4x=0\}=\{-4，-0\}$，

当 $a=0$ 时，$B=\{x\in\mathbf{R}|x^2+2x-1=0\}=\{-1+\sqrt{2}，-1-\sqrt{2}\}$，

所以 $A\cup B=\{0,-4,-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2}\}$.

(2)由 $A=\{-4,0\}$，

因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-4\}$ 或 $B=\{0\}$ 或 $B=\{-4,0\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，关于 x 的方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无实根，

$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8<0$，解得 $a<-1$；

当 $B=\{-4\}$ 时，

关于 x 的方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的根为 $x_1=x_2=-4$，由韦达定理 $\begin{cases}-4+(-4)=-2(a+1),\\(-4)\times(-4)=a^2-1,\end{cases}$ 无解；

当 $B=\{0\}$ 时，

关于 x 的方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的根为 $x_1=x_2=0$，由韦达定理 $\begin{cases}0+0=-2(a+1),\\0\times 0=a^2-1,\end{cases}$ 解得 $a=-1$；

当 $B=\{-4,0\}$，

关于 x 的方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 的根为 $x_1=0$，$x_2=-4$，

由韦达定理 $0+(-4)=-2(a+1)$，解得 $a=1$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\{a|a\leqslant -1$ 或 $a=1\}$.

20．(本小题满分 12 分)

已知正数 a，b 满足 $a+b-ab=0$.

(1)求 $4a+b$ 的最小值；

(2)求$\frac{a}{a-1}+\frac{9b}{b-1}$的最小值.

解：(1)因为 $a+b-ab=0$，所以$(a-1)(b-1)=1$，又因为 a，$b>0$，所以 $a>1$，$b>1$，

$4=(4a-4)(b-1)\leqslant(\frac{4a+b-5}{2})^2$，所以 $4a+b\geqslant 9$，

当且仅当 $4a-4=b-1=2$，即$a=\frac{3}{2}$，$b=3$ 时取"＝"，

所以 $4a+b$ 的最小值为 9.

(2)因为$b=\frac{a}{a-1}$，又因为 a，$b>0$，所以 $b>1$，

$\frac{a}{a-1}+\frac{9b}{b-1}=b+\frac{9b}{b-1}=10+(b-1)+\frac{9}{b-1}\geqslant 10+2\sqrt{(b-1)\frac{9}{b-1}}=16$，

当且仅当$b-1=\frac{9}{b-1}$，即 $b=4$，$a=\frac{4}{3}$时取"＝"，

所以$\frac{a}{a-1}+\frac{9b}{b-1}$最小值为 16.

21．(本小题满分 12 分)

设函数$y=ax^2-(2a+3)x+6$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $y=0$ 的解集是$\{2，3\}$，求实数 a 的值；

(2)若 $y+2>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围：

(3)当 $a=1$ 时，$\forall t>-2$，关于 x 的不等式 $y\leqslant-3x+3+m$ 在$[-2，1]$有解，求实数 m 的取值范围.

解：(1)由题意$ax^2-(2a+3)x+6=0$的根为 2，3，

当 $a=0$ 时，$-3x+6=0$，解得 $x=2$，不合题意；

当 $a\neq 0$ 时，$ax^2-(2a+3)x+6=0$的根为 2，3，

所以$2+3=\frac{2a+3}{a}$，$2\times3=\frac{6}{a}$，解得 $a=1$．

(2)$y+2>0$ 恒成立，即$ax^2-(2a+3)x+8>0$恒成立，

当 $a=0$ 时，$-3x+8>0$，解得$x<\frac{8}{3}$，舍去；

当 $a\neq0$ 时，则$a<0$，$(2a+3)^2-32a<0$，所以 $\begin{cases}a>0,\\4a^2-20a+9<0,\end{cases}$ 解得$\frac{1}{2}<a<\frac{9}{2}$.

所以实数 a 的取值范围为$(\frac{1}{2}，\frac{9}{2})$.

(3)$a=1$ 时，$\forall t>-2$，$y\leqslant-3x+3+m$ 在$[-2，t]$有解，

即$\forall t>-2$，$x^2-2x+3-m\leqslant0$在$[-2，t]$有解，

则-2 是$x^2-2x+3-m\leqslant0$的解，

因为抛物线$y=x^2-2x+3$开口向上，对称轴 $x=1$，

所以 $11-m\leqslant0$，解得 $m\geqslant11$，

所以 m 的取值范围为$[11，+\infty)$.

22．(本小题满分 12 分)

设函数 $y=ax^2+x-b(a\in\mathbf{R}，b\in\mathbf{R})$.

(1)若$b=a-\frac{5}{4}$，且集合$\{x|y=0\}$中有且只有一个元素，求实数 a 的取值集合；

(2)当 $a\geqslant1$，$b>1$ 时，记不等式 $y\geqslant0$ 的解集为 P，集合 $Q=\{x|-2-t<x<-2+t\}$．若对于任意正数 t，$P\cap Q\neq\varnothing$，求$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$的最大值．

解：(1)当$b=a-\frac{5}{4}$时，$\{x|y=0\}=\{x|ax^2+x-a+\frac{5}{4}=0\}$.

①当 $a=0$ 时，$\{x|ax^2+x-a+\frac{5}{4}=0\}=(-\frac{5}{4})$，符合题意；

②当 $a\neq 0$ 时，$ax^2+x-a+\frac{5}{4}=0$ 有两重根，

$\Delta=1+4a(a-\frac{5}{4})=4a^2-5a+1=0$，解得 $a=1$ 或$a=\frac{1}{4}$,

综上，a 的取值集合为$\{0，1,\frac{1}{4}\}$.

(2)$Q=\{x|-2-t<x<-2+t\}$，对于任意正数 t，$P\cap Q\neq\varnothing$，则$-2\in P$，

即 $4a-2-b\geqslant 0$，所以$2a-\frac{1}{2}b\geqslant 1$，

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\leqslant(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})(2a-\frac{1}{2}b)=\frac{5}{2}-(\frac{b}{2b}+\frac{2a}{b})\leqslant\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$,

当且仅当$2a-\frac{1}{2}b=1$，且$\frac{b}{2b}=\frac{2a}{b}$，即 $a=1$，$b=2$ 时取等号.

所以$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$的最大值为$\frac{1}{2}$.