

# 十堰市普通高中六校协作体 2022 秋高一年级期中考试 数学试卷

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{-3, -2, 1, 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{2\}$     B.  $\{1, 2\}$     C.  $\{-3, -2\}$     D.  $\{-3, -2, 1\}$

2. 命题  $p: \forall x \in \mathbf{N}, x^3 > x^2$  的否定为 ( )

- A.  $\forall x \in \mathbf{N}, x^3 \leq x^2$     B.  $\exists x \notin \mathbf{N}, x^3 \leq x^2$     C.  $\exists x \in \mathbf{N}, x^3 \leq x^2$     D.  $\exists x \in \mathbf{N}, x^3 < x^2$

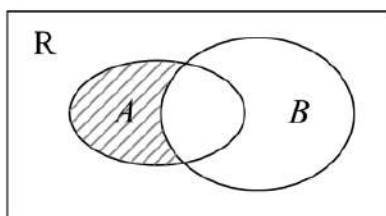
3. 设  $p: x < 3$ ,  $q: -1 < x < 3$ , 则  $p$  是  $q$  成立的

- A. 充分必要条件    B. 充分不必要条件    C. 必要不充分条件    D. 既不充分也不必要条件

4. 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $x + y = 10$ , 则  $xy$  有 ( )

- A. 最小值 25    B. 最大值 50    C. 最大值 25    D. 最小值 50

5. 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x | -1 < x \leq 1\}$ , 则图中阴影部分所表示的集合为 ( )



- A.  $\{-1, 0, 1\}$     B.  $\{0, 1\}$     C.  $\{-2, -1, 0\}$     D.  $\{-2, -1\}$

6. 设  $a, b, c, d$  为实数, 且  $a > b > 0 > c > d$ , 则下列不等式正确的是 ( )

- A.  $c^2 < cd$     B.  $a - c < b - d$     C.  $ac > bd$     D.  $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} < 0$

7. 下列不等式中正确的是 ( )

- A.  $x + \frac{1}{x} \geq 2$     B.  $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$  的最小值为 2    C.  $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$     D.  $x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} \geq 1$

8. 集合  $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$ ,  $B = \{x | ax + 2 \leq 0\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-2, 2]$     B.  $[-2, 2)$     C.  $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$     D.  $[-2, 0) \cup (0, 2)$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列命题中正确的有 ( )

- A. “ $x = 1$ ”是“ $x^2 - 4x + 3 = 0$ ”的充分不必要条件  
 B.  $A \cup B = A$  是  $B \subseteq A$  的必要不充分条件  
 C.  $x^2 = y^2$  是  $x = -y$  的必要不充分条件  
 D. 已知  $ab > 0$ , 则  $a > b$  是  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  的充要条件

10. 已知实数  $x, y$  满足  $1 < x < 6, -1 < y < 2$ , 则 ( )

- A.  $0 < x + y < 8$     B.  $2 < x - y < 4$   
 C.  $-6 < xy < 12$     D.  $-1 < \frac{y}{x} < 2$

11. 已知  $a \in Z$ ，关于  $x$  一元二次不等式  $x^2 - 6x + a \leq 0$  的解集中有且仅有 3 个整数，则  $a$  的值可以是 ( )

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

12. 若  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 - xy = 1$ ，则 ( )

A.  $x + y \leq 1$

B.  $x + y \geq -2$

C.  $x^2 + y^2 \leq 2$

D.  $x^2 + y^2 \geq 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ，则  $A$  的真子集个数为\_\_\_\_\_.

14. 若正数  $m, n$  满足  $2m + n = 2$ ，则  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  的最小值\_\_\_\_\_.

15. 命题 “ $\exists x \in R, x^2 + 2ax + a \leq 0$ ” 是假命题，则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

16. 已知  $a > 0$ ，关于  $x$  的不等式  $(a^2 - 1)x^2 + 4x - 4 < 0$  恰有四个整数解，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知集合  $A = \{x | x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$ ，集合  $B = \left\{x \mid \frac{2x-7}{x-6} \leq 1\right\}$ .

(1) 求集合  $B$ ;

(2) 求  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$ .

18. 已知全集  $U = R$ ， $A = \{x | x \leq a - 2 \text{ 或 } x \geq a\}$ ， $B = \{x | x^2 - 5x < 0\}$ .

(I) 当  $a = 1$  时，求  $A \cap B$ ， $A \cup B$ ， $(\complement_U A) \cap B$ ;

(II) 若  $A \cap B = B$ ，求实数  $a$  的取值范围.

19. 已知  $P: 2x^2 - 3x - 2 \geq 0$ ， $Q: x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) < 0$ .

(1) 当  $0 \in q$  时，求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若  $P$  是  $\neg Q$  的充分不必要条件，求实数  $a$  的取值范围.

20. 设函数  $f(x) = ax^2 + (b-2)x + 3$ .

(1) 若不等式  $f(x) > 0$  的解集为  $(-1, 1)$ , 求实数  $a, b$  的值;

(2) 若  $f(1) = 0$ , 且存在  $x \in \mathbf{R}$ , 使  $f(x) > 4$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

21. 求下列函数的最值

(1) 若正数  $x, y$  满足  $x + 3y = 5xy$ , 求  $3x + 4y$  的最小值.

(2) 求函数  $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1} (x > 1)$  的最小值.

22. 国家发展改革委、住房城乡建设部于 2017 年发布了《生活垃圾分类制度实施方案》，规定 46 个城市在 2020 年底实施生活垃圾强制分类，垃圾回收、利用率要达 35% 以上。截至 2019 年底，这 46 个重点城市生活垃圾分类的居民小区覆盖率已经接近 70%。某企业积极响应国家垃圾分类号召，在科研部门的支持下进行技术创新，新上一种把厨余垃圾加工处理为可重新利用的化工产品的项目。已知该企业日加工处理量  $x$ （单位：吨）最少为 70 吨，最多为 100 吨。日加工处理总成本  $y$ （单位：元）与日加工处理量  $x$  之间的函数关系可近似地

表示为  $y = \frac{1}{2}x^2 + 40x + 3200$ ，且每加工处理 1 吨厨余垃圾得到的化工产品的售价为 100 元。

(1) 该企业日加工处理量为多少吨时，日加工处理每吨厨余垃圾的平均成本最低？此时该企业处理 1 吨厨余垃圾处于亏损还是盈利状态？

(2) 为了该企业可持续发展，政府决定对该企业进行财政补贴，补贴方式共有两种。

① 每日进行定额财政补贴，金额为 2300 元；

② 根据日加工处理量进行财政补贴，金额为  $30x$ 。

如果你是企业的决策者，为了获得最大利润，你会选择哪种补贴方式进行补贴？为什么？



# 答案

## 一、单选题

1-8 DCCCD ADB

## 二、多选题

9.ACD 10.ACD 11.ABC 12.BC

## 三、填空题

13. 15 14.  $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$  15.  $0 < a < 1$  16.  $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$

## 四、解答题

17. 【小问1详解】

因为  $\frac{2x-7}{x-6} \leq 1$ , 所以  $\frac{2x-7}{x-6} - 1 \leq 0$ , 即  $\frac{x-1}{x-6} \leq 0$ , 即  $\begin{cases} (x-1)(x-6) \leq 0 \\ x-6 \neq 0 \end{cases}$ ,

解得:  $1 \leq x < 6$ , 所以  $B = \{x | 1 \leq x < 6\}$

【小问2详解】

解  $x^2 + 2x - 8 \leq 0$  得:  $-4 \leq x \leq 2 \therefore A = \{x | -4 \leq x \leq 2\}$ ,  $\therefore \complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < -4 \text{ 或 } x > 2\}$ ,

$\therefore (\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 2 < x < 6\}$

18. 【详解】(I) 当  $a = 1$  时,  $A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x < 0\} = \{x | 0 < x < 5\}$ ,

则  $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 5\}$ ,  $A \cup B = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 0\}$ ,

$\therefore C_U A = \{x | -1 < x < 1\}$ ,  $\therefore (C_U A) \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$ ;

(II)  $A \cap B = B$ , 即  $B \subseteq A$

则  $a - 2 \geq 5$  或  $a \leq 0$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $a \geq 7$  或  $a \leq 0$

19. 【详解】(1) 由题意可知,  $0^2 - 2(a-1) \times 0 + a(a-2) < 0$ , 解得  $0 < a < 2$ , 故实数  $a$  的取值范围为  $(0, 2)$ ;

(2) 由  $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$ , 解得  $x \leq -\frac{1}{2}$  或  $x \geq 2$ ,

由  $x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) < 0$ , 解得  $a-2 < x < a$ ,

故命题  $p$ :  $x \leq -\frac{1}{2}$  或  $x \geq 2$ ; 命题  $q$ :  $a-2 < x < a$ ,

从而  $\neg q$ :  $x \leq a-2$  或  $x \geq a$ ,

因为  $p$  是  $\neg q$  的充分不必要条件, 所以  $\{x | x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq 2\} \subsetneq \{x | x \leq a-2 \text{ 或 } x \geq a\}$ ,

从而  $\begin{cases} a-2 \geq -\frac{1}{2} \\ a \leq 2 \end{cases}$ , 解得  $\frac{3}{2} \leq a \leq 2$ , 故实数  $a$  的取值范围为  $[\frac{3}{2}, 2]$ .

20. 【详解】解: (1) 由题意可知: 方程  $ax^2 + (b-2)x + 3 = 0$  的两根是  $-1, 1$

所以  $\begin{cases} -\frac{b-2}{a} = -1+1=0 \\ \frac{3}{a} = (-1) \times 1 = -1 \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$

(2) 由  $f(1) = 0$  得  $b = -a - 1$

存在  $x \in R$ ,  $f(x) > 4$  成立, 即使  $ax^2 + (b-2)x - 1 > 0$  成立,

又因为  $b = -a - 1$ , 代入上式可得  $ax^2 - (a+3)x - 1 > 0$  成立.

当  $a \geq 0$  时, 显然存在  $x \in R$  使得上式成立;

当  $a < 0$  时, 需使方程  $ax^2 - (a+3)x - 1 = 0$  有两个不相等的实根

所以  $\Delta = (a+3)^2 + 4a > 0$  即  $a^2 + 10a + 9 > 0$  解得  $a < -9$  或  $-1 < a < 0$

综上可知  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -9) \cup (-1, +\infty)$ .

21. 【小问 1 详解】

因为  $x + 3y = 5xy$ , 所以  $\frac{1}{y} + \frac{3}{x} = 5$ ,

因此  $3x + 4y = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{y} + \frac{3}{x} \right) (3x + 4y) = \frac{1}{5} \left( 13 + \frac{3x}{y} + \frac{12y}{x} \right) \geq \frac{1}{5} \left( 13 + 2\sqrt{\frac{3x}{y} \cdot \frac{12y}{x}} \right) = 5$ ,

当且仅当  $\frac{3x}{y} = \frac{12y}{x}$  且  $\frac{1}{y} + \frac{3}{x} = 5$ , 即  $x = 1, y = \frac{1}{2}$  时, 等号成立,

所以  $3x + 4y$  的最小值为 5.

【小问 2 详解】

因为  $x > 1$ , 所以令  $t = x - 1 (t > 0)$ , 则  $x = t + 1$ ,

因此  $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1} = \frac{(t+1)^2 + 2}{t} = \frac{t^2 + 2t + 3}{t} = t + \frac{3}{t} + 2 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{3}{t}} + 2 = 2\sqrt{3} + 2$ ,

当且仅当  $t = \frac{3}{t}$ , 即  $t = \sqrt{3}$  时, 等号成立, 即当  $x = t + 1 = \sqrt{3} + 1$  时, 等号成立,

所以  $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$  的最小值为  $2\sqrt{3} + 2$ .

22. 【详解】解: (1) 由题意可知, 每吨厨余垃圾平均加工成本为

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{2} + \frac{3200}{x} + 40 \quad x \in [70, 100].$$

$$\text{又 } \frac{x}{2} + \frac{3200}{x} + 40 \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{3200}{x}} + 40 = 2 \times 40 + 40 = 120.$$

当且仅当  $\frac{x}{2} = \frac{3200}{x}$ , 即  $x = 80$  吨时, 每吨厨余垃圾的平均加工成本最低.

因为  $100 < 120$ , 所以此时该企业处理 1 吨厨余垃圾处于亏损状态;

(2) 若该企业采用第一种补贴方式, 设该企业每日获利为  $y_1$ , 由题可得

$$y_1 = 100x - \left( \frac{1}{2}x^2 + 40x + 3200 \right) + 2300 = -\frac{1}{2}x^2 + 60x - 900 = -\frac{1}{2}(x - 60)^2 + 900$$

因为  $x \in [70, 100]$ , 所以当  $x = 70$  吨时, 企业最大获利为 850 元.

若该企业采用第二种补贴方式, 设该企业每日获利为  $y_2$ , 由题可得

$$y_2 = 130x - \left( \frac{1}{2}x^2 + 40x + 3200 \right) = -\frac{1}{2}x^2 + 90x - 3200 = -\frac{1}{2}(x - 90)^2 + 850$$

因为  $x \in [70, 100]$ , 所以当  $x = 90$  吨时, 企业最大获利为 850 元.

结论: 选择方案一, 因为日加工处理量为 70 吨时, 可以获得最大利润; 选择方案二, 日加工处理量为 90 吨时, 获得最大利润, 能够为社会做出更大贡献. 由于最大利润相同, 所以选择两种方案均可.