

金陵中学 2023—2024 高一年级 10 月学情调研测试

数学试卷

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A = \{x|1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x|2 < x < 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
A. $\{x|2 < x \leq 3\}$ B. $\{x|2 \leq x \leq 3\}$ C. $\{x|1 \leq x < 4\}$ D. $\{x|1 < x < 4\}$
2. 设集合 $A = \{2, 1-a, a^2-a+2\}$, 若 $4 \in A$, 则 $a = (\quad)$
A. -3 或 -1 或 2 B. -3 或 -1 C. -3 或 2 D. -1 或 2
3. 集合 $M = \{x|x = 5k - 2, k \in Z\}$, $P = \{x|x = 5n + 3, n \in Z\}$, $S = \{x|x = 10m + 3, m \in Z\}$ 之间的关系是()
A. $S \subsetneq P \subsetneq M$ B. $S = P \subsetneq M$ C. $S \subsetneq P = M$ D. $P = M \subsetneq S$
4. 已知集合 $A = \{x \mid \frac{3x}{x+1} \leq 2\}$, $B = \{x|a-2 < x < 2a+1\}$, 若 $x \in A$ 的必要不充分条件是 $x \in B$, 则实数 a 的取值范围是()
A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(\frac{1}{2}, 1]$ C. $[\frac{1}{2}, 1]$ D. $[\frac{1}{2}, 1)$
5. 设 $a, b \in R$, 则“ $(a-b)a^2 < 0$ ”是“ $a < b$ ”的()
A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

6. 已知 $-1 < a + b < 3$, 且 $2 < a - b < 4$, 则 $2a + 3b$ 的范围是 ()

- A. $(-\frac{13}{2}, \frac{17}{2})$ B. $(-\frac{7}{2}, \frac{11}{2})$ C. $(-\frac{7}{2}, \frac{13}{2})$ D. $(-\frac{9}{2}, \frac{13}{2})$

7. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b = ab - 1$, 则 $a + 2b$ 的最小值为 ()

- A. $5 + 2\sqrt{6}$ B. $8\sqrt{2}$ C. 5 D. 9

8. 已知实数 $a > 0, b > 0$, 且满足 $(a-1)^3 + (b-1)^3 \geq 3(2-a-b)$ 恒成立, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. 1 C. 2 D. 4

二、多项选择题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求的.全部选对的得5分,部分选对的得3分,有选错的得0分)

9. 下列命题为真命题的是()

A. 若 $a > b > 0$, 则 $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$

B. 若 $m > n > 0$, 则 $\frac{m+1}{n+1} < \frac{m}{n}$

C. 如果 $c > a > b > 0$, 那么 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$

D. $a \geq b > -1$, 则 $\frac{a}{a+1} \geq \frac{b}{b+1}$

10. 已知关于 x 的方程 $x^2 + (m-3)x + m = 0$, 下列结论正确的是()

A. 方程 $x^2 + (m-3)x + m = 0$ 有实数根的充要条件是 $m \in \{m | m < 1 \text{ 或 } m > 9\}$

B. 方程 $x^2 + (m-3)x + m = 0$ 有两正实数根的充要条件是 $m \in \{m | 0 < m \leq 1\}$

C. 方程 $x^2 + (m-3)x + m = 0$ 无实数根的必要条件是 $m \in \{m | m > 1\}$

D. 当 $m = 3$ 时, 方程的两实数根之和为 0

11. 已知 $x > 0, y > 0$ 且 $3x + 2y = 10$, 则下列结论正确的是()

A. xy 的最大值为 $\frac{6}{25}$

B. $\sqrt{3x} + \sqrt{2y}$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$

C. $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$

D. $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$

12. 已知有限集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($n \geq 2, n \in N$), 如果 A 中元素 a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$, 就称 A 为“完美集”下列结论中正确的有 ()

- A. 集合 $\{-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}$ 不是“完美集”
- B. 若 a_1, a_2 是两个不同的正数, 且 $\{a_1, a_2\}$ 是“完美集”, 则 a_1, a_2 至少有一个大于 2
- C. 二元“完美集”有无穷多个
- D. 若 $a_i \in N^*$, 则“完美集” A 有且只有一个, 且 $n = 3$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若正实数 x, y 满足 $2x + y + 6 = xy$, 则 $2x + y$ 的最小值是 _____.

14. 若“ $1 - m < x + m < 2m$ ”是“ $\frac{2}{x-1} < -1$ ”的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围为 _____.

15. 设 $x = \frac{1}{\sqrt{3}-2}, y = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$, 则代数式 $\frac{x^2 + xy + y^2}{13(x+y)}$ 的值为 _____.

16. 已知集合 $A = \{(a, b) | 3a + b - 2 = 0, a \in N\}$, $B = \{(a, b) | k(a^2 - a + 1) - b = 0, a \in N\}$, 若存在非零整数, 满足 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题(本大题共6小题,共70分. 解析时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + bx + 1 = 0, a \in R, b \in R\}$, 求:

- (1) 当 $b = 2$ 时, A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围;
- (2) 当 a, b 满足什么条件时, 集合 A 为空集.

18. 已知命题 $p: \forall x \in R, x^2 + 2m - 3 > 0$, 命题 $q: \exists x_0 \in R, x_0^2 - 2mx_0 + m + 2 < 0$.

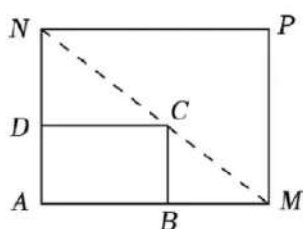
- (1) 若命题 p 为真命题, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若命题 q 为真命题, 求实数 m 的取值范围;
- (3) 若命题 p, q 至少有一个为真命题, 求实数 m 的取值范围.

19. 设命题 p : 实数 x 满足 $M = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, 命题 q : 实数 x 满足 $N = \{x | 1 - 2m \leq x \leq 2 + m\}$.

- (1) 若命题“ $\forall x \in M, x \in N$ ”是真命题, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若命题 p 是命题 q 的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

20. 如图所示, 将一个矩形花坛 $ABCD$ 扩建成一个更大的矩形花坛 $AMPN$, 要求 M 在射线 AB 上, N 在射线 AD 上, 且对角线 MN 过点 C , 已知 AB 长为 4 米, AD 长为 3 米, 设 $AN = x$.

- (1) 要使矩形花坛 $AMPN$ 的面积大于 54 平方米, 则 AN 的长应在什么范围内?
- (2) 要使矩形花坛 $AMPN$ 的扩建部分铺上大理石, 则 AN 的长度是多少时, 用料最省? (精确到 0.1 米)



21. 设 $a, b, c \in R$, 求证: “关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一个根是 2” 的充要条件为 “ $4a + 2b + c = 0$ ”.

22. 已知函数 $y = (m + 1)x^2 - mx + m - 1 (m \in R)$.

(1) 若不等式 $y < 0$ 的解集为 \emptyset , 求 m 的取值范围;

(2) 当 $m > -2$ 时, 解不等式 $y \geq m$.