



8. 已知  $x > 0$ ,  $y > 0$ , 且  $x + y + xy = 3$ , 若不等式  $x + y \geq m^2 - m$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围为( )

A.  $-2 \leq m \leq 1$

B.  $-1 \leq m \leq 2$

C.  $m \leq -2$  或  $m \geq 1$

D.  $m \leq -1$  或  $m \geq 2$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 若集  $M = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$ ,  $N = \{x | ax - 2 = 0\}$ , 且  $N \subseteq M$ , 则下列选项中符合条件的实数  $a$  的值有( )

A. 1

B.  $-\frac{2}{3}$

C.  $-\frac{3}{2}$

D. 0

10. 已知函数  $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$ , 则下列结论正确的是( )

A. 若  $x > 1$ , 则  $f(x)$  有最小值 5

B. 若  $x > 1$ , 则  $f(x)$  有最小值 3

C. 若  $x < 1$ , 则  $f(x)$  有最大值 -3

D. 若  $x < 1$ , 则  $f(x)$  有最大值 -5

11. 若  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a + b = 4$ , 则下列不等式中对一切满足条件的  $a, b$  恒成立的是( )

A.  $ab \leq 4$

B.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{2}$

C.  $a^2 + b^2 \geq 8$

D.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$

12. 已知  $a, b$  均为正实数, 下列结论正确的有( )

A. 若  $a + b = 2$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$

B. 若  $a + b = 2$ , 则  $\frac{1+b}{ab} \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 若  $a + b = 1$ , 则  $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \leq 2\sqrt{5}$

D. 当且仅当  $a = \sqrt{2}b$  时,  $\frac{a}{a+b} + \frac{2b}{a+2b}$  取得最大值  $4 - 2\sqrt{2}$

三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知命题  $p: 0 < x < a$ , 命题  $q: -1 < x < 2$ , 若  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 则实数  $a$  的取值集合是\_\_\_\_\_.

14. 已知  $-1 \leq a + b \leq 1, 1 \leq a + 2b \leq 3$ , 则  $a + 3b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 已知  $x, y$  均为正实数.  $x + y = 1$ , 则  $\frac{y}{x} + \frac{1}{y}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

16. 已知正实数  $a, b, c$  满足  $a^2 + ab + b^2 - c = 0$ , 则当  $\frac{ab}{c}$  取得最大值时,  $a + 2b - c$  的最大值为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，17 题 10 分，剩下每题 12 分。共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知集合  $A = \{x | x \geq 2\}$ ， $B = \{x | 3 < x < 5\}$ 。

(1) 求  $A \cup B$ ；

(2) 定义  $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$ ，求  $A - B$ 。

18. 写出下列命题的否定：

①  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $\sqrt{x^2} = x$ 。

② 某箱产品中至少有一件次品。

③ 方程  $x^2 - 8x + 15 = 0$  有一个根是偶数。

④  $\exists x \in \mathbb{R}$ , 使  $x^2 + x + 1 \leq 0$ 。

19. 设正实数  $x, y$  满足  $2x + 3y = xy$ ，试求：

(1)  $x + y$  的最小值

(2)  $xy$  的最小值。

20. (1)已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $2x + 3y = 6$ , 求  $xy$  的最大值;

(2)已知  $x > 0, y > 0$ ,  $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$ , 求  $x + y$  的最小值.

21. 已知正实数  $x, y$  满足  $x + y = 2$ ,

(1)求  $x^2 + y^2$  的最小值;

(2)若  $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq a$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

22. 求关于  $x$  的不等式  $x^2 + (1 - a)x - a < 0$  的解集, 其中  $a$  是常数.

一、例题 1. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^2 + \beta^2$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \times (-1) = 3$ 。

2. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha^2 + \beta^2 = 3, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha + \beta$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-p)^2 - 2 \times (-1) = 3$ 。

即  $p^2 + 2 = 3, p^2 = 1, p = \pm 1$ 。

故  $\alpha + \beta = -p = \mp 1$ 。

3. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha^2 + \beta^2 = 3$ ，求  $\alpha^3 + \beta^3$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

又  $\alpha^2 + \beta^2 = 3$ ，则  $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$ ，即  $1 - 2 \times (-1) = 3$ ，成立。

则  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3 \times (-1) \times 1 = 4$ 。

4. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^4 + \beta^4$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 3^2 - 2 \times (-1)^2 = 9 - 2 = 7$ 。

5. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^5 + \beta^5$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta)^5 - 5\alpha\beta(\alpha + \beta)^3 + 5\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) = 1^5 - 5 \times (-1) \times 1^3 + 5 \times (-1)^2 \times 1 = 1 + 5 + 5 = 11$ 。

6. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^6 + \beta^6$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 2\alpha^3\beta^3 = 4^2 - 2 \times (-1)^3 = 16 - 2 \times (-1) = 18$ 。

7. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^7 + \beta^7$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^7 + \beta^7 = (\alpha + \beta)^7 - 7\alpha\beta(\alpha + \beta)^5 + 7\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^3 - 7\alpha^3\beta^3(\alpha + \beta) = 1^7 - 7 \times (-1) \times 1^5 + 7 \times (-1)^2 \times 1^3 - 7 \times (-1)^3 \times 1 = 1 + 7 + 7 - 7 = 8$ 。

8. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^8 + \beta^8$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^8 + \beta^8 = (\alpha^4 + \beta^4)^2 - 2\alpha^4\beta^4 = 7^2 - 2 \times (-1)^4 = 49 - 2 = 47$ 。

9. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^9 + \beta^9$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^9 + \beta^9 = (\alpha + \beta)^9 - 9\alpha\beta(\alpha + \beta)^7 + 9\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^5 - 9\alpha^3\beta^3(\alpha + \beta)^3 + 9\alpha^4\beta^4(\alpha + \beta) = 1^9 - 9 \times (-1) \times 1^7 + 9 \times (-1)^2 \times 1^5 - 9 \times (-1)^3 \times 1^3 + 9 \times (-1)^4 \times 1 = 1 + 9 + 9 - 9 + 9 = 19$ 。

10. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^{10} + \beta^{10}$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^{10} + \beta^{10} = (\alpha^5 + \beta^5)^2 - 2\alpha^5\beta^5 = 11^2 - 2 \times (-1)^5 = 121 - 2 \times (-1) = 123$ 。

11. 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + px + q = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ ，求  $\alpha^{11} + \beta^{11}$  的值。

解：由韦达定理得  $\alpha + \beta = -p = 1, \alpha\beta = q = -1$ 。

则  $\alpha^{11} + \beta^{11} = (\alpha + \beta)^{11} - 11\alpha\beta(\alpha + \beta)^9 + 55\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^7 - 165\alpha^3\beta^3(\alpha + \beta)^5 + 330\alpha^4\beta^4(\alpha + \beta)^3 - 462\alpha^5\beta^5(\alpha + \beta) = 1^{11} - 11 \times (-1) \times 1^9 + 55 \times (-1)^2 \times 1^7 - 165 \times (-1)^3 \times 1^5 + 330 \times (-1)^4 \times 1^3 - 462 \times (-1)^5 \times 1 = 1 + 11 + 55 - 165 + 330 - 462 = 1$ 。