高一数学：基本不等式易错题精选

1.设 x、y∈R，a＞0，b＞0，若 $a^x=b^y=3$，$a+2b=2\sqrt{6}$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最大值为___．

2.设正数 a，b，c 满足 a+b+c=1，则（　　）

A. ab+bc+ca 有最小值 $\frac{1}{3}$

B. $a^2+b^2+c^2$ 有最大值 $\frac{1}{3}$

C. $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}$ 有最小值 1

D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 有最大值 9

3.（多选题，4 分）已知 a＞0、b＞0，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}\geq4$

B. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq4$

C. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geq a+b$

D. $\frac{2ab}{a+b}\geq\sqrt{ab}$

4.（单选题，5 分）若 $x^2+4y^2+9z^2=4$，则 x+y+3z 的最大值（　　）

A.9

B.3

C.1

D.27

5.（单选题，5 分）设 a＞0，b＞0，a+4b=1，则使不等式 $t\leq\frac{a+b}{ab}$ 恒成立的实数 t 的取值范围是（　　）

A.t≤8

B.t≥8

C.t≤9

D.t≥9

6.（填空题，2 分）已知正数 a，b 满足 ab=a+b+1，则 a+2b 的最小值为___．

7.函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}+2x(x>0)$ 的最小值为（　　）

A.3

B.4

C.5

D.6

8.△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 BC 边上的高为 $\frac{a}{2}$，则 $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 的最大值为___ .

9.设 a＞0，b＞0，若关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}ax+y=1\\x+by=1\end{cases}$ 无解，则 a+b 的取值范围为___ .

10.设 a，b，c 是正实数，满足 b+c≥a，则 $\frac{b}{c}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值为___ .

高一数学：基本不等式易错题精选

参考答案与试题解析

---

1. 设 x、y∈R，a＞0，b＞0，若 $a^x=b^y=3$，$a+2b=2\sqrt{6}$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最大值为 ___ .

【正确答案】：[1]1

【解析】：由 $a^x=b^y=3$ 化简得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_3 ab$，再由基本不等式可得 $2ab\le\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2=6$，从而可得 $ab\le3$，从而确定最大值.

【解答】：解：∵$a^x=b^y=3$，

∴$x=\log_a 3$，$y=\log_b 3$，

∴$\frac{1}{x}=\log_3 a$，$\frac{1}{y}=\log_3 b$，

∴$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_3 a+\log_3 b=\log_3 ab$，

∵$2ab\le\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2=6$，

∴$ab\le3$，故 ab 的最大值为 3，

当且仅当 $a=2b=\sqrt{6}$ 时，等号成立，

故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_3 ab\le\log_3 3=1$，

故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最大值为 1，

故答案为：1.

【点评】：本题考查了对数式与指数式的互化，对数函数的单调性及基本不等式在求最值中的应用，同时考查了整体思想与转化思想的应用，属于中档题.

2. 设正数 a，b，c 满足 a+b+c=1，则（　　）

A. ab+bc+ca 有最小值 $\frac{1}{3}$

B. $a^2+b^2+c^2$ 有最大值 $\frac{1}{3}$

C. $\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}$ 有最小值 1

D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 有最大值 9

【正确答案】：C

【解析】：由 a+b+c=1 的两边平方，结合不等式 $a^2+b^2\geq 2ab$，$b^2+c^2\geq 2bc$，$a^2+c^2\geq 2ac$，可解决 A、B；用柯西不等式可解决 C；把 1 换成 a+b+c 可解决 D.

【解答】：解：∵正数 a，b，c 满足 a+b+c=1，

∴$1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2)+2ab+2bc+2ca\geq 3ab+3bc+3ca$，

∴$ab+bc+ca\leq \frac{1}{3}$，∴ab+bc+ca 有最大值为 $\frac{1}{3}$，故 A 错误；

再根据 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1\leq 3(a^2+b^2+c^2)$，

∴$a^2+b^2+c^2\geq \frac{1}{3}$，∴$a^2+b^2+c^2$ 有最小值为 $\frac{1}{3}$，故 B 错误；

根据柯西不等式：$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}=(\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c})(a+b+c)$

$=[(\frac{b}{\sqrt{a}})^2+(\frac{c}{\sqrt{b}})^2+(\frac{a}{\sqrt{c}})^2][(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]\geq (a+b+c)^2=1$，

∴$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}$ 有最小值 1，故 C 正确；

∵正数 a，b，c 满足 a+b+c=1，∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=3+(\frac{a}{b}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})\geq 3+2\sqrt{\frac{a}{b}\bullet\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\bullet\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\bullet\frac{b}{c}}=9$，

当且仅当 a=b=c 时，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 取最小值 9，故 D 错误.

故选：C.

【点评】：本题考查了基本不等式和柯西不等式，考查了转化思想，属于中档题.

3.（多选题，4 分）已知 a＞0、b＞0，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}\geq 4$

B. $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$

C. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geq a+b$

D. $\frac{2ab}{a+b}\geq \sqrt{ab}$

【正确答案】：ABC

【解析】：对各式转化变形，然后直接利用基本不等式求解即可.

【解答】：解：∵$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\bullet\frac{1}{b}}+2\sqrt{ab}=2(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{ab})\geq 2\times 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{ab}}\bullet\sqrt{ab}}=4$（当且仅当 a=b=1 时取“=“），∴A 正确；

∵（a+b）（$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$）≥2$\sqrt{ab}$×2$\sqrt{\frac{1}{a}\bullet\frac{1}{b}}$=4（当且仅当 a=b 时取“=“），∴B 正确；

∵$\sqrt{ab}$（a+b）≤$\frac{a+b}{2}$•（a+b）=$\frac{a^2+b^2+2ab}{2}$≤$\frac{a^2+b^2+a^2+b^2}{2}$=$a^2+b^2$（当且仅当 a=b 时取“=“），∴$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}$≥a+b（当且仅当 a=b 时取“=“），∴C 正确；

∵a+b≥2$\sqrt{ab}$，∴$\frac{2ab}{a+b}$≤$\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}$=$\sqrt{ab}$，∴D 错误．

故选：ABC．

【点评】：本题主要考查基本不等式的应用，属于中档题．

4.（单选题，5 分）若 $x^2+4y^2+9z^2=4$，则 x+y+3z 的最大值（　　）

A.9

B.3

C.1

D.27

【正确答案】：B

【解析】：利用条件 $x^2+4y^2+9z^2=4$，构造柯西不等式：（x+y+3z）^{2}=[x+$\frac{1}{2}$（2y）+（3z）]^2≤[（x^2+（2y）^{2}+（3z）^{2}]（1^2+（$\frac{1}{2}$）^{2}+1^2）进行解题即可．

【解答】：解：由柯西不等式可知：

（x+y+3z）^{2}=[x+$\frac{1}{2}$（2y）+（3z）]^2≤[（x^2+（2y）^{2}+（3z）^{2}]（1^2+（$\frac{1}{2}$）^{2}+1^2）

=（$x^2+4y^2+9z^2$）×$\frac{9}{4}$，

∵$x^2+4y^2+9z^2=4$，

即：（x+y+3z）^{2}≤4×$\frac{9}{4}$=9，

∴（x+y+3z）^{2}≤9，

∴-3≤x+y+3z≤3，

∴x+y+3z 的最大值为 3．

故选：B．

【点评】：本题主要考查了函数的最值，以及柯西不等式的应用，解题的关键是利用（x+2y+3z）^{2}≤（$x^2+4y^2+9z^2$）（$1^2+1^2+1^2$）进行解题，属于中档题

5.（单选题，5 分）设 a＞0，b＞0，a+4b=1，则使不等式 t≤$\frac{a+b}{ab}$恒成立的实数 t 的取值范围是（　　）

A.t≤8

B.t≥8

C.t≤9

D.t≥9

【正确答案】：C

【解析】：使不等式 t≤ $\frac{a+b}{ab}$ 恒成立，转化为求 $\frac{a+b}{ab}$ 的最小值，将已知等式与 $\frac{a+b}{ab}$ 相乘展开，利用基本不等式求最小值，从而求出 t 的范围.

【解答】：解：因为 a＞0，b＞0，所以 t≤ $\frac{a+b}{ab}$ 等价于 t≤ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，只需 t≤（$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$）$_{min}$，

而 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ =（$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$）（a+4b）= $\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}$ +5≥2 $\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{4b}{a}}$ +5=9，

当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{4b}{a}$，即 a=2b= $\frac{1}{3}$ 时取“=”.

∴t≤9；

故选：C.

【点评】：本题考查了基本不等式的运用；关键是巧用已知等式将所求转化为求分式的最小值．属于中档题.

6.（填空题，2 分）已知正数 a，b 满足 ab=a+b+1，则 a+2b 的最小值为___ .

【正确答案】：[1]7

【解析】：由 a+b+1=ab 解出 a 或 b，代入 a+2b，转化为 a 或 b 的函数求最值即可.

【解答】：解：已知正数 a，b 满足 ab=a+b+1，则 a= $\frac{b+1}{b-1}$，a＞0，得到 b＞1，

所以 a+2b= $\frac{b+1}{b-1}+2b=\frac{2}{b-1}+2(b-1)+3\ \geq 3+2\sqrt{\frac{2}{b-1}\times 2(b-1)}$ =7；

当且仅当 b=2 时等号成立；

所以 a+2b 的最小值为 7；

故答案为：7.

【点评】：本题主要考查利用基本不等式求最值，在求最值时，有时定值需要凑出．还要注意消元思想的运用.

7.（单选题，5 分）函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}+2x(x>0)$ 的最小值为（　　）

A.3

B.4

C.5

D.6

【正确答案】：A

【解析】：将函数解析式化为f（x）$=\frac{1}{x^2}$+x+x，运用基本不等式求最小值．

【解答】：解：$f(x)=\frac{1}{x^2}+2x(x>0)=\frac{1}{x^2}+x+x\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}\cdot x\cdot x}=3$，当且仅当$\frac{1}{x^2}=x$时等号成立；

故选：A．

【点评】：本题考查了基本不等式的应用；关键是将函数式化为运用基本不等式的形式．

8.（填空题，2分）△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且BC边上的高为$\frac{a}{2}$，则$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$的最大值为___．

【正确答案】：[1]2 $\sqrt{2}$

【解析】：利用三角形的面积计算公式得$\frac{1}{2}$•a•$\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$bcsinA，求出a^2=2bcsinA；利用余弦定理可得cosA=$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，得$b^2+c^2=a^2$+2bccosA，代入$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}=\frac{b^2+c^2}{bc}$，化为三角函数求最值即可．

【解答】：解：因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$•a•$\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$bcsinA，

即a^2=2bcsinA；

由余弦定理得cosA=$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

所以$b^2+c^2=a^2$+2bccosA=2 bcsinA+2bccosA；

代入得$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}=\frac{b^2+c^2}{bc}$=2sinA+2cosA=2 $\sqrt{2}$ sin（A+$\frac{\pi}{4}$），

当A=$\frac{\pi}{4}$时，$\frac{c}{b}+\frac{b}{4}$取得最大值为2 $\sqrt{2}$．

故答案为：2 $\sqrt{2}$．

【点评】：本题考查了三角形的面积计算公式、余弦定理、两角和差的正弦计算公式的应用问题，考查了推理能力与计算能力，是综合性题目．

9.（填空题，2分）设a＞0，b＞0，若关于x，y的方程组$\begin{cases}ax+y=1\\x+by=1\end{cases}$无解，则a+b的取值范围为___．

【正确答案】：[1]（2，+∞）

【解析】：根据方程组无解，得到两直线平行，建立 a，b 的方程关系，利用转化法，利用基本不等式的性质进行求解即可.

【解答】：解：∵关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+by=1 \end{cases}$ 无解，

∴直线 ax+y=1 与 x+by=1 平行，

∵a＞0，b＞0，

∴ $\frac{a}{1}=\frac{1}{b}\neq\frac{1}{1}$，

即 a≠1，b≠1，且 ab=1，则 b= $\frac{1}{a}$，

由基本不等式有：

a+b=a+ $\frac{1}{a}$ ≥2 $\sqrt{a\bullet\frac{1}{a}}$ =2，当且仅当 a=1 时取等，而 a 的范围为 a＞0 且 a≠1，不满足取等条件，

∴a+b＞2，

故答案为：（2，+∞）.

【点评】：本题主要考查直线平行的应用以基本不等式的应用，考查学生的计算能力.

10.（填空题，2 分）设 a，b，c 是正实数，满足 b+c≥a，则 $\frac{b}{c}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值为___ .

【正确答案】：[1] $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

【解析】：利用放缩法和基本不等式的性质进行求解.

【解答】：解：∵a，b，c 是正实数，满足 b+c≥a

∴ $\frac{b}{c}+\frac{c}{a+b}$

$\geq\frac{b}{c}+\frac{c}{2b+c}$

$=\frac{b}{c}+\frac{1}{\frac{2b}{c}+1}$

$=\frac{1}{2}$ （$\frac{2b}{c}+1)+\frac{1}{\frac{2b}{c}+1}$ - $\frac{1}{2}$

$\geq\sqrt{2}-\frac{1}{2}$（当且仅当 b+c=a 且 $\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 时取等号）

故答案为： $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

【点评】：本题主要考查基本不等式的应用和放缩法，属于中等题.

扫码获取更多内部资料