

2023-2024 学年第一学期 10 月六校联合调研试题

高一数学

本试卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷 (选择题)

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x < 3\}$ ，则下列选项正确的是 ()
A. $\frac{1}{2} \in A$ B. $-1 \subseteq A$ C. $3 \notin A$ D. $\{3\} \subseteq A$
2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2 < y \leq 3$ ”的否定是 ()
A. $\exists x \in \mathbf{R}, 2 < y \leq 3$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, y \leq 2$ 或 $y > 3$
C. $\forall x \notin \mathbf{R}, 2 < y \leq 3$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, y \leq 2$ 或 $y > 3$
3. 若 $a > 0, b > 0$ ，则“ $a + b \leq 1$ ”是“ $ab \leq 1$ ”的 ()
A. 充分且不必要条件 B. 必要且不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 在等式 $1 = \frac{1}{\square} + \frac{9}{\square}$ 的等号右侧两个分数的分母方块处，各填上一个正实数，则这两个正实数之和的最小值为 ()
A. 6 B. 10 C. 16 D. 20
5. 若关于 x 的不等式 $ax + b \leq 0$ 的解集为 $\{x \mid x \geq -1\}$ ，则关于 x 的不等式 $\frac{ax + b}{x - 2} > 0$ 的解集为 ()
A. $\{x \mid x < -1$ 或 $x > 2\}$ B. $\{x \mid -2 < x < 1\}$ C. $\{x \mid x < -2$ 或 $x > 1\}$ D. $\{x \mid -1 < x < 2\}$
6. 若 $\forall x \in [1, 3]$ ，使 $2x^2 - 4x + 7 - m < 0$ 成立，则 m 的取值范围为 ()

- A. $(5, +\infty)$ B. $(5, 13)$ C. $(13, +\infty)$ D. $(-\infty, 13)$

7. 设 $P = \frac{1}{3}$, $Q = \sqrt{7} - \sqrt{5}$, $R = \sqrt{11} - 3$, 则 P, Q, R 的大小顺序是 ()

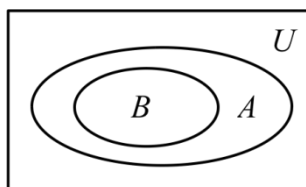
- A. $P > Q > R$ B. $Q > R > P$ C. $R > P > Q$ D. $Q > P > R$

8. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 若 A, B 是 U 的两个非空子集, 记满足“ A 中元素的最小值大于 B 中元素的最大值”为集合对 (A, B) , 则所有集合对 (A, B) 的个数为 ()

- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

二、多选题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知集合 U, A, B 的关系如图所示, 则下列选项正确的是 ()



A. $A \cap B = B$

B. $B \cap C_U A = \emptyset$

C. $C_U(A \cup B) = C_U(A \cap B)$

D. 若 U 为自然数集, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, 则 $A \cap C_U B = \{2\}$

10. 下列命题中, 为真命题的是 ()

A. “ $a + b = 0$ ”的充要条件是“ $\frac{a}{b} = -1$ ”

B. 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $xy \neq 0$, 则 x, y 都不为 0

C. “ $a^2 < 1$ ”是“ $a < 2$ ”的充分且不必要条件

D. 函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的零点是 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$

11. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 若 $a > b > c$, 且 $a + b + c = 0$, 则下列不等关系正确的是 ()

A. $ac < bc$

B. $a|b| > c|b|$

C. $a^2 + bc > a(b + c)$

D. $\frac{c}{a-c} < \frac{c}{b-c}$

12. 用 $C(A)$ 表示非空集合 A 中的元素个数. 对于集合 A, B , 定义

$$A \star B = \begin{cases} C(A) - C(B), C(A) \geq C(B) \\ C(B) - C(A), C(A) < C(B) \end{cases}$$

若 $A = \{0, 1\}$, $B = \{x | (x^2 - ax)(x^2 + ax + 2) = 0\}$, 设实

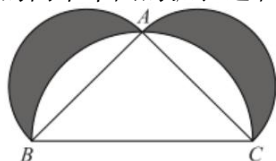
数 a 的所有可能取值组成的集合是 S , 则下列选项正确的是 ()

- A. $C(B)$ 的可能值为 1,2,3,4 B. 若 $A*B=0$, 则 a 的取值范围为 $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
 C. 若 $A*B=1$, 则 $C(S)=3$ D. 若 $A*B=2$, 则 a 的取值范围为 $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知 $3 < x < 7, 1 < y < 2$, 则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是_____.
14. 已知集合 $A = \{0, m, m^2 - 3m + 2\}$, 且 $2 \in A$, 则实数 m 的值为_____.
15. 设 m 为实数, 若二次函数 $y = x^2 - x + m$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有两个零点, 则 m 的取值范围是_____.
16. 古希腊数学家希波克拉底曾研究过如下图的几何图形, 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC , 直角边 AB , AC . 若以斜边 BC 为直径的半圆面积为 π , 则以 AB , AC 为直径的两个半圆的弧长之和的最大值为_____.



四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本题满分 10 分)

设全集为 R , 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 > 0\}$, $B = \{x | 1 - 2a < x < a + 4\}$

- (1) 若 $a = 1$, 求 $(C_R A) \cap B$;
 (2) 问题: 已知_____, 求实数 a 的取值范围.

从下面给出的两个条件中任选一个, 补充在上面的问题中, 并进行解答 (请选出一种方案进行解答, 若选择多个方案分别解答, 则按第一个解答计分)

① $A \cup B = R$; ② $A \cap B = \emptyset$.

18. (本题满分 12 分)

已知 $p: x^2 - 2x - 24 < 0, q: x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a \leq 0$.

- (1) 分别求出 p, q 中关于 x 的不等式的解;
 (2) 当 $a > -1$ 时, 若 p 是 q 的必要且不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

19. (本题满分 12 分)

(1) 已知 $a > 1$, 求 $\frac{a^2 + 3a + 2}{a - 1}$ 的最小值.

(2) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = ab - 1$, 求 $a + 2b$ 的最小值.

20. (本题满分 12 分)

已知命题 $P: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - ax + 1 \leq 0$.

(1) 若 P 为真命题, 求实数 a 的取值范围;

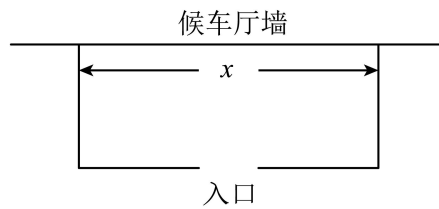
(2) 命题 Q : 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (a - 1)x + a - 2 = 0$ 的一根小于 0, 另一根大于 3, 若 P, Q 至少有一个是真命题, 求实数 a 的取值范围.

21. (本题满分 12 分)

在国庆假期期间, 某火车站为舒缓候车室人流的压力, 决定在候车大楼外搭建临时候车区, 其中某次列车的候车区是一个总面积为 $98m^2$ 的矩形区域(如图所示), 矩形场地的一面利用候车厅大楼外墙(长度为 $18m$), 其余三面用铁栏杆围挡, 并留一个宽度为 $2m$ 的入口. 现已知铁栏杆的租赁费用为 100 元/ m . 设该矩形区域的长为 x (单位: m), 租赁铁栏杆的总费用为 Y (单位: 元).

(1) 将 Y 表示为 x 的函数, 并求租赁搭建此区域的铁栏杆所需费用的最小值及相应的 x 值.

(2) 若所需总费用不超过 3300 元, 求 x 的取值范围?



22. (本题满分 12 分)

由有限个元素组成的集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 记集合 A 中的元素个数为 $\text{card}(A)$,

即 $\text{card}(A) = n$. 定义 $A + A = \{x + y | x \in A, y \in A\}$, 集合 $A + A$ 中的元素个数记为 $\text{card}(A + A)$,

当 $\text{card}(A+A) = \frac{n(n+1)}{2}$ 时, 则称集合 A 满足性质 M .

(1) 已知 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$, 判断集合 A , B 是否满足性质 M , 并说明理由;

(2) 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, 2023\}$, $a_1 < a_2 < a_3 < 2023$ 且 $a_i \in \mathbb{N}^*$ ($i = 1, 2, 3$), 若集合 A 满足性质 M , 求 $a_1 + a_2 + a_3$ 的最大值.

2023-2024 学年第一学期 10 月六校联合调研试题参考答案

1. C 2. B 3. A 4. C 5. D 6. C 7. D 8. B

9. ABD 10. BC 11. AC 12. ACD

13. $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{3}\right)$ 14. 3 15. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 16. 2π

17.解:

(1) 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 > 0\} = \{x | (x+2)(x-4) > 0\} = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$ 2 分

则 $C_R A = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$,3 分

当 $a = 1$ 时, $B = \{x | -1 < x < 5\}$,4 分

故 $(C_R A) \cap B = \{x | -1 < x \leq 4\} = (-1, 4]$ 5 分

【备注】 第一问共 5 分: 集合 A 求错, 第一问最多得 1 分;

(2) 当选① $A \cup B = R$ 时,

所以 $\begin{cases} 1-2a < -2 \\ a+4 > 4 \end{cases}$, (*)8 分

即 $\begin{cases} a > \frac{3}{2} \\ a > 0 \end{cases}$,9 分

得到 $a > \frac{3}{2}$ 10 分

【备注】 第二问共 5 分, 选①时, 不等关系 (*) “写错”或“部分写错”, 第二问得 0 分;

当选② $A \cap B = \emptyset$ 时,

当 $B = \emptyset$, 即 $1-2a \geq a+4$ 时, 满足 $A \cap B = \emptyset$, 解得 $a \leq -1$;6 分

当 $B \neq \emptyset$ 即 $a > -1$ 时, 由 $A \cap B = \emptyset$, 得 $\begin{cases} a > -1 \\ -2 \leq 1-2a \quad (**), \\ a+4 \leq 4 \end{cases}$ 8 分

即 $\begin{cases} a > -1 \\ a \leq \frac{3}{2} \\ a \leq 0 \end{cases}$, 解得 $-1 < a \leq 0$9 分

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$ 10分

【备注】第二问共5分, 选②时, 不等关系(※※)“写错”或“部分写错”, 第二问最多得1分;

18.解:

(1) $\because x^2 - 2x - 24 = (x-6)(x+4) < 0$,1分

\therefore 不等式的解集为: $\{x | -4 < x < 6\}$2分

$\because x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + a = [x - (2a+1)](x-a) \leq 0$ 3分

当 $2a+1 = a$, 即 $a = -1$ 时, $(x+1)^2 \leq 0$, 此不等式的解集为: $\{x | x = -1\}$ 4分

当 $2a+1 > a$, 即 $a > -1$ 时, 此不等式的解集为: $\{x | a \leq x \leq 2a+1\}$ 5分

当 $2a+1 < a$, 即 $a < -1$ 时, 此不等式的解集为: $\{x | 2a+1 \leq x \leq a\}$ 6分

【备注】区间表达或不等式形式也可以

(2) 记命题 P 对应的集合为 $A = \{x | -4 < x < 6\}$,

当 $a > -1$ 时, q 对应的集合为 $B = \{x | a \leq x \leq 2a+1\}$;

$\because P$ 是 q 的必要且不充分条件, 则 $B \subsetneq A$8分

则满足: $\begin{cases} a > -4 \\ 2a+1 < 6 \end{cases}$, 则 $-4 < a < \frac{5}{2}$,11分

又 $a > -1$, $\therefore -1 < a < \frac{5}{2}$12分

19. 解:

(1) 设 $t = a-1 > 0$, 则 $a = t+1$

则

$y = \frac{(t+1)^2 + 3(t+1) + 2}{t} = \frac{t^2 + 5t + 6}{t} = t + \frac{6}{t} + 5$

.....4分

$\geq 2\sqrt{6} + 5$

.....5分

当且仅当 $t = \sqrt{6}$ 即 $a = \sqrt{6} + 1$ 时等号成立

所以原式最小值为

$2\sqrt{6} + 5$ 6分

【备注】没有写出取等条件扣 1 分，没有下最后的结论不扣分

(2) 法一：由 $a + b = ab - 1$ 可得

$$a = \frac{b+1}{b-1} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{则 } a + 2b = \frac{b+1}{b-1} + 2b = 1 + \frac{2}{b-1} + 2b = \frac{2}{b-1} + 2(b-1) + 3 \geq 2\sqrt{4} + 3 = 7 \dots\dots 11$$

分

当且仅当 $b = 2, a = 3$ 时取“等号”

所以 $a + 2b$ 最小值为

$$7 \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

【备注】没有写出取等条件扣 1 分，没有下最后的结论不扣分

法二：由 $a + b = ab - 1$ 可得

$$(a-1)(b-1) = 2 \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$a + 2b = (a-1) + 2(b-1) + 3 \geq 2\sqrt{2(a-1)(b-1)} + 3 = 7 \dots\dots\dots$$

.....11 分

当且仅当 $b = 2, a = 3$ 时取等号

所以 $a + 2b$ 最小值为

$$7 \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

【备注】没有写出取等条件扣 1 分，没有下最后的结论不扣分

20. 解：

(1) 由题意，若 p 为真，则 $\Delta = a^2 - 4 \geq 0$ 解得

$$a \leq -2 \text{ 或 } a \geq 2, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2) 法一：若 q 为真， $x^2 + (a-1)x + a - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+a-2) = 0,$

方程两根为 -1 和

$$2 - a \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

则由题意得 $2 - a > 3$ ，所以

$$a < -1 \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

当 p, q 均为假时，有 $\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \geq -1 \end{cases}$ ，可得

$$-1 \leq a < 2 \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

因此，如果 p, q 中至少有一个为真时，

$$a < -1 \text{ 或 } a \geq 2 \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

法二：设 $f(x) = x^2 + (a-1)x + a - 2$

若 q 为真, 则有 $\begin{cases} f(0) = a - 2 < 0 \\ f(3) = 4a + 4 < 0 \end{cases}$ 解得

$a < -1$ 8 分

当 p, q 均为假时, 有 $\begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \geq -1 \end{cases}$, 可得

$-1 \leq a < 2$ 10 分

因此, 如果 p, q 中至少有一个为真时,

$a < -1$ 或 $a \geq 2$ 12 分

【备注】 若讨论 p, q 一真一假和两真:

p 真 q 假: $a \geq 2$, p 假 q 真: $-2 < a < -1$,

p, q 都真: $a \leq -2$ 11 分

所以, $a < -1$ 或 $a \geq 2$

【考查内容】 集合的综合运用.

21. 解:

(1) 由已知得: $2 < x \leq 18$,1 分

候车区宽为: $\frac{98}{x} m$,2 分

$y = 100(x - 2 + \frac{196}{x}) = 100(x + \frac{196}{x}) - 200$ 4 分

$\geq 100 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{196}{x}} - 200 = 2600$ 6 分

即 $y \geq 2600$, 当且仅当 $\begin{cases} x = \frac{196}{x} \\ 2 < x \leq 18 \end{cases}$,7 分

即 $x = 14$ 时 “=” 取到最小值 2600 元.8 分

(2) 由 (1) 可知: $\begin{cases} 100(x - 2 + \frac{196}{x}) = 100(x + \frac{196}{x}) - 200 \leq 3300 \\ 2 < x \leq 18 \end{cases}$ 9 分

即 $\begin{cases} x^2 - 35x + 196 \leq 0 \\ 2 < x \leq 18 \end{cases}$,10 分

解得: $7 \leq x \leq 18$ 11 分

答: 所需总费用不超过 3300 元时, $7 \leq x \leq 18$12 分

22.解:

(1) 因为 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$,

所以 $A + A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\text{card}(A + A) = 5 \neq \frac{3(3+1)}{2}$, 则集合 A 不满足性质 M ,2分

所以 $B + B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\text{card}(B + B) = 9 \neq \frac{4(4+1)}{2}$, 则集合 B 不满足性质 M .
.....4分

(2) $\because a_1 < a_2 < a_3 < 2023$, 且 $a_i \in \mathbb{N}^*$, $\therefore a_3 \leq 2022$,

要使 $a_1 + a_2 + a_3$ 取最大, 则 $a_3 = 2022$, $a_2 \leq 2021$,5分

当 $a_2 = 2021$ 时, $2023 + 2021 = 2 \times 2022$, 则 $\{2021, 2022, 2023\}$ 不满足性质 M ,6分

要使 $a_1 + a_2 + a_3$ 取最大, 则 $a_2 = 2020$, $a_1 \leq 2019$,7分

当 $a_1 = 2019$ 时, $2023 + 2019 = 2022 + 2020$, 则 $\{2019, 2020, 2022, 2023\}$ 不满足性质 M , ...8分

当 $a_1 = 2018$ 时, $2022 + 2018 = 2 \times 2020$, 则 $\{2018, 2020, 2022\}$ 不满足性质 M ,9分

当 $a_1 = 2017$ 时, 则 $\{2017, 2020, 2022, 2023\}$ 满足性质 M ,10分

则使得 $a_1 + a_2 + a_3$ 取最大, 可得 $a_3 = 2022, a_2 = 2020, a_1 = 2017$,

\therefore 若集合 A 满足性质 M , 则 $a_1 + a_2 + a_3$ 的最大值为 6059.12分

分

【备注】 本题解决本题的关键是, 通过第一问的两个集合判定是否满足性质 M , 可得到结论为若集合 A 中的三个数满足 $a + c = 2b$ 或四个数满足 $a + d = b + c$ 时, 集合不满足性质 M , 从而对集合中的运算进行检验判断.

