

参考答案:

1. D

【分析】解不等式 $2x-1>0$ 得到 $x>\frac{1}{2}$, 写成集合的形式即为 D 的形式.

【详解】解不等式 $2x-1>0$ 得到 $x>\frac{1}{2}$, 写成集合的形式, 则得到选项为 D. 故选 D.

【点睛】本小题考查一元一次不等式的解法, 考查解集要写成集合的形式. 属于基础题.

2. B

【分析】根据集合中的元素类型逐一判断即可.

【详解】对于 A: 集合中的元素是点集, 但 $(3,2), (2,3)$ 不是相同的点, 故 M, N 不是同一集合;

对于 B: 集合中的元素是数集, 并且是相同元素, 故 M, N 是同一集合;

对于 C: 集合 M 中的元素是点集, 集合 N 中的元素是数集, 故 M, N 不是同一集合;

对于 D: 集合 M 中的元素是数集, 集合 N 中的元素是点集, 故 M, N 不是同一集合;

故选: B.

3. C

【分析】利用特殊值排除错误选项, 利用差比较法证明正确选项.

【详解】A 选项, $ac > bc$, 如 $(-2) \times (-1) > (-1) \times (-1)$, 而 $-2 < -1$, 所以 A 选项错误.

B 选项, $a^2 > b^2$, 如 $(-1)^2 > 0^2$, 而 $-1 < 0$, 所以 B 选项错误.

C 选项, $a > b, a-b > 0, c < 0$, 则 $ac - bc = (a-b)c < 0$, 所以 $ac < bc$, 所以 C 选项正确.

D 选项, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 如 $\sqrt{1} < \sqrt{2}$, 而 $1 < 2$, 所以 D 选项错误.

故选: C

4. B

【分析】分类讨论 $x+2=1$ 或 $x^2=1$, 求出 x , 检验即可.

【详解】因为 $1 \in \{x+2, x^2\}$, 所以 $x+2=1$ 或 $x^2=1$, 所以 $x=1$ 或 $x=-1$,

当 $x=-1$ 时, $x+2=x^2$, 不符合题意, 所以 $x=-1$ 舍去;

故以 $x=1$,

选 B

【点睛】本题主要考查元素与集合之间的关系, 注意集合中元素的互异性, 属于基础题型.

5. A

【分析】由题意，直接取特值， $a=-1, b=-2$ 和 $a=1, b=-1$ 可以排除 B、C、D 选项，得出答案.

【详解】由题，依次分析选项，取 $a=-1, b=-2$ ，此时 $a^2 < b^2$ ，故 B 错；

此时 $ab < b^2$ ，C 错；再取 $a=1, b=-1$ ，此时 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，D 错

故选 A

【点睛】本题考查了不等式，属于基础题.

6. D

【详解】试题分析：命题“所有能被 2 整除的整数都是偶数”的否定是“存在一个能被 2 整除的数不是偶数”. 故选 D.

考点：命题的否定.

7. C

【详解】试题分析：因为 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ ， $A = \{1, 2\}$ ，所以 $B = \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ ，故选

C.

考点：并集及其运算；集合的包含关系判断及应用

点评：此题考查了并集及其运算，以及集合的包含关系判断及应用，熟练掌握并集的定义是解本题的关键.

8. B

【解析】根据集合相等的条件建立关系式即可求出 a, b 的值，进而可求得 $a^{2019} + b^{2020}$ 的值.

【详解】 $\because \left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\} = \{a^2, a+b, 0\}$ ，又 $a \neq 0$ ， $\therefore \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$ ，

$\therefore \{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\}$ ， $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

当 $a=1, b=0$ 时， $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\} = \{1, 0, 1\}$ ，不符合集合元素的互异性，故舍去；

当 $a=-1, b=0$ 时， $\{-1, 0, 1\} = \{1, -1, 0\}$ ，符合题意.

$\therefore a^{2019} + b^{2020} = -1$.

故选：B

【点睛】本题考查集合相等的条件，集合的构成元素，属于基础题.

9. ACD

【分析】利用元素与集合的关系、集合与集合的关系直接判断即可.

【详解】A项中集合 $\{0,1,2\}$ 中有1这个元素,所以A正确;

因为集合 $\{1\}$ 是集合 $\{0,1,2\}$ 的真子集,不能用“ \in ”来表示,所以B错误;

因为任何集合都是它本身的子集,所以C正确;

因为集合中的元素具有无序性,所以D正确;

因为集合 $\{0,1\}$ 表示数集,它有两个元素,而集合 $\{(0,1)\}$ 表示点集,它有一个元素,所以E错误.

综上可得ACD正确.

故选:ACD.

【点睛】本题考查元素与集合的关系、集合与集合的关系,考查学生对基本知识掌握的情况,属于基础题.

10. BCD

【分析】根据基本不等式的条件与“1”的用法等依次讨论各选项即可得答案.

【详解】解:对于A选项,当 $a < 0, b < 0$ 时不成立,故错误;

对于B选项,当 $a < 0$ 时, $a + \frac{1}{a} = -\left[(-a) + \left(-\frac{1}{a}\right)\right] \leq 2$, 当且仅当 $a = -1$ 等号成立,故正确;

对于C选项,若 a, b 为正实数,则 $\frac{b}{a} > 0, \frac{a}{b} > 0$, 所以 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立,故正确;

对于D选项,由基本不等式“1”的用法得

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)(x + 2y) = 4 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 8$, 当且仅当 $x = 2y$ 时等号成立,故正

确.

故选:BCD

11. CD

【分析】利用特殊值法以及充分条件、必要条件的定义可判断A、B选项的正误;利用必要条件的定义可判断C选项的正误;利用充要条件的定义可判断D选项的正误.

【详解】对于A,因为“ $a = b$ ”时 $ac = bc$ 成立, $ac = bc$ 且 $c = 0$ 时, $a = b$ 不一定成立,所以“ $a = b$ ”是“ $ac = bc$ ”的充分不必要条件,故A错;

对于 B, $a = -1, b = -2, a > b$ 时, $a^2 < b^2$; $a = -2, b = 1, a^2 > b^2$ 时, $a < b$.

所以“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的既不充分也不必要条件, 故 B 错;

对于 C, 因为“ $a < 3$ ”时一定有“ $a < 5$ ”成立, 所以“ $a < 3$ ”是“ $a < 5$ ”的必要条件, C 正确;

对于 D“ $a + 5$ 是无理数”是“ a 是无理数”的充要条件, D 正确.

故选: CD.

【点睛】 本题考查充分条件、必要条件的判断, 考查了充分条件和必要条件定义的应用, 考查推理能力, 属于基础题.

12. AB

【解析】 根据假命题的否定为真命题可知 $\forall x \in M, x \leq 3$, 又 $\forall x \in M, |x| > x$, 求出命题成立的条件, 求交集即可知 M 满足的条件.

【详解】 $\because \exists x \in M, x > 3$ 为假命题,

$\therefore \forall x \in M, x \leq 3$ 为真命题,

可得 $M \subseteq (-\infty, 3]$,

又 $\forall x \in M, |x| > x$ 为真命题,

可得 $M \subseteq (-\infty, 0)$,

所以 $M \subseteq (-\infty, 0)$,

故选: AB

【点睛】 本题主要考查了含量词命题的真假, 集合的包含关系, 属于中档题.

13. $\{1, 2, 4, 8\}$

【分析】 利用并集的定义可求得集合 $A \cup B$.

【详解】 $\because A = \{1, 2\}, B = \{2, 4, 8\}, \therefore A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$.

故答案为: $\{1, 2, 4, 8\}$.

【点睛】 本题考查并集的计算, 考查计算能力, 属于基础题.

14. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 4 \geq 0$

【分析】 根据全称命题的否定是特称命题来解答.

【详解】 由全称命题的否定是特称命题得

命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 4 < 0$ 的否定 $\neg p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 4 \geq 0$

故答案为: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 4 \geq 0$

15. $\frac{1}{4}$ ##0.25

【分析】由基本不等式 $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ 直接求解即可.

【详解】 $x > 0, y > 0$, 则 $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ 即 $1 \geq 2\sqrt{xy}$, 所以 $xy \leq (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时取等, 所以 xy 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{4}$.

16. 1 $\{-1, 1, 3, 5\}$

【分析】先根据条件得到 $3 \in B$, 让集合 B 中的元素分别等于 3 来求得 a 的值及 $A \cup B$.

【详解】 $\because A \cap B = \{3\}$,

$\therefore 3 \in B$,

当 $a+2=3$ 时, $a=1$, 此时 $B=\{3, 5\}$, $A \cup B = \{-1, 1, 3, 5\}$;

当 $a^2+4=3$ 时, 方程无解.

故答案为: 1; $\{-1, 1, 3, 5\}$.

17. (1) $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$

(2) $(-\infty, 1]$

【分析】(1)运用集合的并集运算;

(2)由题意 $M \subseteq N$, 考虑 $M = \emptyset$ 和 M 非空 两类情况进行讨论.

【详解】(1) $N = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$,

当 $a=1$ 时, $M = \{x | -a < x < a+1, a \in \mathbb{R}\} = \{x | -1 < x < 2\}$,

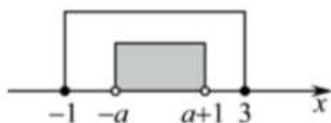
$\therefore M \cup N = \{x | -1 \leq x \leq 3\} \cup \{x | -1 < x < 2\} = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$,

(2) $Q N = \{x | -1 \leq x \leq 3\}, M = \{x | -a < x < a+1, a \in \mathbb{R}\}$,

若 $x \in M$ 是 $x \in N$ 的充分条件, 则 $M \subseteq N$

若 $M = \emptyset$, 当 $-a \geq a+1$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, 满足条件,

若 M 非空, 要使 $M \subseteq N$,



$$\text{则} \begin{cases} -a < a+1 \\ -a \geq -1 \\ a+1 \leq 3 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a > -\frac{1}{2} \\ a \leq 1 \\ a \leq 2 \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < a \leq 1,$$

综上, 实数 a 的范围是 $(-\infty, 1]$.

$$18. (1) \left(-3, \frac{1}{2}\right)$$

$$(2) \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

$$(3) \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$(4) \emptyset$$

【分析】(1) 根据一元二次不等式的解法, 求得不等式的解集.

(2) 根据一元二次不等式的解法, 求得不等式的解集.

(3) 根据一元二次不等式的解法, 求得不等式的解集.

(4) 根据一元二次不等式的解法, 求得不等式的解集.

【详解】(1) 设 $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, 令 $f(x) = 0$, 得 $2x^2 + 5x - 3 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -3$.

从而 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $(-3, 0)$, 并且 $f(x)$ 的图象开口向上,

根据函数 $f(x)$ 的图象, 可知所求不等式的解集为 $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$.

(2) 设 $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$, 令 $f(x) = 0$, 得 $-3x^2 + 6x - 2 = 0$, 解得 $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 或 $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$,

从而 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交于点 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 和 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, 并且 $f(x)$ 的图象开口向下,

所以根据函数 $f(x)$ 的图象, 可知所求不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

(3) 设 $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$. 令 $f(x) = 0$, 得 $4x^2 - 4x + 1 = 0$, 解得 $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$,

从而 $f(x)$ 的图象与 x 轴相交于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 函数 $f(x)$ 的图象开口向上,

所以根据函数 $f(x)$ 的图象, 可知所求不等式的解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

(4) 设 $f(x) = -x^2 + 6x - 10$, 令 $f(x) = 0$, 得 $-x^2 + 6x - 10 = 0$, 即 $(x-3)^2 = -1$, 该方程无解,

从而函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴没有公共点, 又函数 $f(x)$ 的图象开口向下,

所以根据函数 $f(x)$ 的图象, 可知所求不等式的解集为 \emptyset .

19. $p=8, a=5, b=-6$

【详解】试题分析: 因为 $A \cap B = \{3\}$, 所以 $3 \in A$, 从而可得 $p=8$, 又由于 $3 \in A$, 且 $A \cup B = \{2, 3, 5\}$, 方程 $x^2 - ax - b = 0$ 的二根为 2 和 3. 由韦达定理可得 a, b , 从而解决问题

试题解析: 由 $A \cap B = \{3\}$, 知 $3 \in M$, 得 $p=8$.

由此得 $M = \{3, 5\}$, 从而 $N = \{3, 2\}$,

由此得 $a=5, b=-6$.

考点: 1. 交集及其运算; 2. 并集及其运算

20. $4\sqrt{2} - 3$

【分析】变形得 $y = 2(x+1) + \frac{4}{x+1} - 3$, 然后利用基本不等式求最小值.

【详解】 $\because x > 0, \therefore x+1 > 1$

$$\therefore y = 2x + \frac{4}{x+1} - 1 = 2(x+1) + \frac{4}{x+1} - 3 \geq 2\sqrt{2(x+1) \times \frac{4}{x+1}} - 3 = 4\sqrt{2} - 3,$$

当且仅当 $2(x+1) = \frac{4}{x+1}$, 即 $x = \sqrt{2} - 1$ 时取等号,

\therefore 函数 $y = 2x + \frac{4}{x+1} - 1$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 3$

21. 详见解析.

【详解】试题分析: 根据函数解析式中 a 的情况可分三种情况①一次函数, ②二次函数一个零点③二次函数两个零点讨论, 将问题转化为求一元二次方程的根, 就是函数的零点.

试题解析: 当 $a=0$ 时, 函数为 $y = -x + 2$, 则其零点为 $x=2$.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 则由 $\left(\frac{1}{2^x} - 1\right)(x-2) = 0$,

解得 $x_1 = x_2 = 2$, 则其零点为 $x=2$.

当 $a \neq 0$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$ 时, 则由 $(ax-1)(x-2) = 0$,

解得 $x = \frac{1}{a}$ 或 $x=2$,

综上所述当 $a=0$ 时, 零点为 $x=2$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 零点为 $x = 2$.

当 $a \neq 0$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$ 时, 零点为 $x = \frac{1}{a}$ 和 $x = 2$.

22. (1) $S = 29088 - 2(9a + 8b)$; (2) 铝合金窗的宽为 160cm , 高为 180cm 时, 可使透光部分的面积最大.

【详解】试题分析: (1) 先根据题意分别求出上、下两栏的高和宽, 然后利用矩形的面积公式将三个透光部分的面积求出相加, 即可求解; (2) 抓住 $ab = 28800$ 进行化简变形, 然后利用基本不等式进行求解, 注意等号成立的条件, 然后求出等号时 a, b 的值即可.

试题解析: (1) \because 铝合金窗宽为 $a\text{cm}$, 高为 $b\text{cm}$, $a > 0, b > 0$,

$$\therefore ab = 28800,$$

又设上栏框内高度为 $h\text{cm}$, 则下栏框内高度为 $2h\text{cm}$, 则 $3h + 18 = b, \therefore h = \frac{b-18}{3}$,

\therefore 透光部分的面积

$$\begin{aligned} S &= (a-18) \times \frac{2(b-18)}{3} + (a-12) \times \frac{b-18}{3} = (a-16)(b-18) = ab - 2(9a+8b) + 288 \\ &= 28800 - 2(9a+8b) + 288 = 29088 - 2(9a+8b) \end{aligned}$$

$$(2) \because 9a + 8b \geq 2\sqrt{9a \cdot 8b} = 2\sqrt{9 \times 8 \times 28800} = 2880,$$

当且仅当 $9a = 8b$ 时等号成立, 此时 $b = \frac{9}{8}a$, 代入式得 $a = 160$, 从而 $b = 180$,

即当 $a = 160$, $b = 180$ 时, S 取得最大值

\therefore 铝合金窗的宽为 160cm , 高为 180cm 时, 可使透光部分的面积最大.

考点: 函数模型的选择与应用.

【方法点睛】本题主要考查了函数模型的选择与应用, 其中解答中涉及到函数解析式的求解、基本不等式求最值等知识的综合考查, 着重考查了学生分析问题和解决问题的能力, 以及转化思想的应用, 本题的解答中将实际问题转化为数学问题的能力, 同时利用基本不等式求解函数的最值是解答的关键, 试题比较基础, 属于基础题.