

9月学分认定考试（数学）

分数：150分 时间：120分钟

第I卷（选择题）

一、单选题

1. 命题“ $\exists x > 1, x^2 - x > 0$ ”的否定是（ ）

A. $\exists x \leq 1, x^2 - x > 0$

B. $\forall x > 1, x^2 - x \leq 0$

C. $\exists x > 1, x^2 - x \leq 0$

D. $\forall x \leq 1, x^2 - x > 0$

2. 下列元素与集合的关系表示不正确的是（ ）

A. $0 \in \mathbb{N}$

B. $0 \in \mathbb{Z}$

C. $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

D. $\pi \in \mathbb{Q}$

3. 已知 $a \in \mathbb{R}$ ，则“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的（ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

4. 已知集合 $A = \{-1, 0, \sqrt{m}\}$ ， $B = \{-1, m\}$ ， $B \subseteq A$ ，则 $m =$ （ ）

A. 0

B. 1

C. 0 或 1

D. -1

5. 若 $\exists x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ，使得 $3x_0^2 - \lambda x_0 + 1 \leq 0$ 成立是假命题，则实数 λ 可能取值是（ ）：

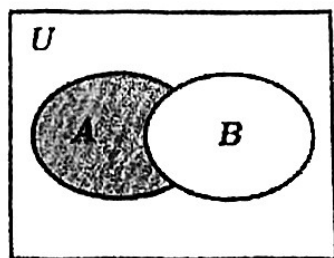
A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. 5

6. 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \left\{x \mid 1 - \frac{2}{x} < 0\right\}$ ， $B = \{x \mid |x| \leq 1\}$ ，则如图阴影部分表示的集合是（ ）



A. $[-1, 0)$

B. $[-1, 0) \cup [1, 2)$

C. $(1, 2)$

D. $(0, 1]$

7. 已知集合 $A = \left\{ x \mid x = \frac{a}{2} + \frac{1}{6}, a \in \mathbb{Z} \right\}$, $B = \left\{ x \mid x = \frac{b}{2} - \frac{1}{3}, b \in \mathbb{Z} \right\}$, $C = \left\{ x \mid x = c + \frac{1}{6}, c \in \mathbb{Z} \right\}$, 则 A, B, C 之间的关系正确的是 ()

- A. $A=B \supseteq C$ B. $A=B \subseteq C$ C. $A=B=C$ D. $A \subseteq B=C$

8. 若两个正实数 x, y 满足 $x+y=3$, 且不等式 $\frac{4}{x+1} + \frac{16}{y} > m^2 - 3m + 5$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $\{m \mid -4 < m < 1\}$ B. $\{m \mid m < -1 \text{ 或 } m > 4\}$
 C. $\{m \mid -1 < m < 4\}$ D. $\{m \mid m < 0 \text{ 或 } m > 3\}$

二、多选题

9. 下列函数最小值为 2 的是 ()

- A. $y = x + \frac{1}{x}$ B. $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ C. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ D. $y = \sqrt{x(4-x)}$

10. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 下列命题为真命题的是 ()

- A. 若 $a < b < 0$, 则 $a^2 < ab < b^2$ B. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$
 C. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$ D. 若 $a > b > 1$, 则 $\frac{b+1}{a+1} > \frac{b}{a}$

11. 若集合 $A = \{x \mid kx^2 + 4x + 4 = 0, x \in \mathbb{R}\}$ 只有一个元素, 则实数 k 的值为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

12. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ 2x^2 + (2k+7)x + 7k < 0 \end{cases}$ 仅有一个整数解, 则 k 的值可能为 ()

- A. -5 B. $-\sqrt{3}$ C. π D. 5

三、填空题

13. 若集合 $A = \{x \mid x > -1\}$, $B = \{x \mid -3 < x < 1\}$, 则 $A \cup B =$ _____

14. 已知正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$, $a+b$ 的取小值为 _____.

15. 已知条件 $p: 2k-1 \leq x \leq 3$, $q: -5 \leq x \leq 3$, p 是 q 的必要条件, 则实数 k 的取值范围是 _____.

16. 已知关于 x 的不等式 $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0 (a > 0)$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则 $x_1 + x_2 + \frac{a}{x_1 x_2}$ 的最小值是 _____.

四、解答题

17. (1) 比较 $(a-2)(a-6)$ 和 $(a-3)(a-5)$ 的大小;

(2) 已知 $2 < x < 3$, $2 < y < 3$, 求 $x-y$ 和 $\frac{x}{y}$ 的取值范围;

18. 已知集合 $A = \{x | x^2 \geq 9\}$, $B = \{x | |x-2| \geq 4\}$, $C = \{x | \frac{x-7}{x+1} \leq 0\}$.

(1) 求集合 B 和 C;

(2) 若全集 $U = \mathbf{R}$, 求 $A \cap (C_U B)$.

19. 已知集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 < 0\}$, $B = \{x | 1 - m < x < 2m + 3\}$.

(1) 若 $A \cup B = B$, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

20. 已知关于 x 的不等式 $x^2 + bx + c - 3 < 0$ 的解集为 $(-1, 2)$.

(1) 当 $x \in [0, 3]$ 时, 求 $\frac{x^2 + bx + c}{x}$ 的最小值;

(2) $\forall x > 0$, 函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象恒在直线 $y = mx$ 的上方, 求实数 m 的取值范围.

21. (1) 当 $a > 0$, 若关于 x 的不等式 $ax^2 - 3x + 2 < 0$ 的解集不空, 求实数 a 的取值范围;

(2) 求关于 x 的不等式 $ax^2 - 3x + 2 > ax - 1$ ($a > 0$) 的解集.

22. 某厂家拟在 2023 年举行某产品的促销活动, 经调查测算, 该产品的年销售量 (即该厂的年产量) x 万

件与年促销费用 m 万元 ($m \geq 0$) 满足 $x = 8 - \frac{k}{m+1}$ (k 为常数), 如果不搞促销活动, 则该产品的年销售量只

能是 4 万件. 已知生产该产品的固定投入为 24 万元, 每生产一万件该产品需要再投入 18 万元, 厂家将每件产

品的销售价格定为每件产品年平均成本的 1.5 倍 (此处每件产品年平均成本按 $\frac{24+18x}{x}$ 元来计算)

(1) 计算 k 的值为多少, 并将 2023 年该产品的利润 y 万元表示为年促销费用 m 万元的函数;

(2) 该厂家 2023 年的促销费用投入多少万元时, 厂家的利润最大? 最大利润是多少?